Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Analyse S4

Examen de septembre 2009

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(13 pts)** Soit la série entière:
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+2\,n}\,x^n.$$
   (a) Déterminer le rayon de convergence de S. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_S$ de S (étudier précisément les bornes de cet ensemble dans $\mathbf{R}$).
   (b) Déterminer le plus grand ensemble ouvert $I\subset\mathbf{R}$ sur lequel S est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que S' n'est pas définie en $\frac{1}{2}$.
   (c) Donner le développement en série entière de $\ln(1-2x)$ en précisant l'ensemble sur lequel ce développement est valable. En déduire que pour tout $x\in I$, $x\,S'(x)+2\,S(x)=-\ln(1-2x)$.
   (d) Soit l'équation différentielle
$$(E)\qquad x\,y'(x)+2\,y(x)=-\ln(1-2x).$$
   Déterminer l'ensemble des solutions de (EH) équation homogène associée à (E) sur $]0,\frac{1}{2}[$.
   (e) Montrer qu'une solution particulière de (E) est la fonction $y_0(x)=\frac{1}{8x^2}(4x^2-1)\ln(1-2x)-\frac{x+1}{4x}$. En déduire l'ensemble des solutions de (E) puis la forme explicite de $S(x)$ pour $x\in]0,\frac{1}{2}[$.

Proof. (a) En utilisant la règle de d'Alembert, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}2$ donc $R=1/2$. **(1pt)**.
On en déduit d'après le cours que S est définie sur son disque ouvert de convergence soit $]-1/2,1/2[$. Par ailleurs, pour $x=\pm1/2$, alors $|a_nx^n|=\frac{1}{n^2+2n}$. Or $\frac{1}{n^2+2n}\sim\frac{1}{n^2}$ et on sait que $\sum\frac{1}{n^2}$ converge. Donc d'après le théorème de comparaison des séries absolument convergentes on en déduit que S est absolument convergente en $\pm1/2$. Ainsi $\mathcal{D}_S=[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. **(1.5pt)**
(b) On sait déjà d'après le cours que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I=]-1/2,1/2[$. **(0.5pts)**.
On sait que $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n,2^n}{n^2+2\,n}\,x^{n-1}$, donc $S'(\frac{1}{2})=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2\,n}$. Mais $\frac{n}{n^2+2n}\sim\frac{1}{n}$ et on sait que $\sum\frac{1}{n}$ ne converge pas. Donc d'après le théorème de comparaison des séries absolument convergentes on en déduit que $S'(\frac{1}{2})=\infty$. **(1.5pts)**.
(c) On sait que pour $x\in]-1,1]$, $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$. Donc, pour $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, $\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$. **(1pt)**.
On a pour $x\in I$, $x\,S'(x)+2\,S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,2^n}{n^2+2\,n}x^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+2\,n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2\,x)^n=-\ln(1-2x)$. **(1pt)**.
(d) L'équation (EH) est telle que $x\,y'(x)+2\,y(x)=0$. C'est une équation linéaire et on sait que l'ensemble $\mathcal{E}_H$ des solutions maximales sur $]0,\frac{1}{2}[$ (ensemble sur lequel les fonctions sont continues) est un ev de dimension 1 tel que $\mathcal{E}_H=\{C\exp\big(-\int_0^x\frac{2}{t}dt\big),\ C\in\mathbf{R}\}=\{\frac{C}{x^2},\ C\in\mathbf{R}\}$. **(1pt)**.
(e) Pour trouver une solution particulière y_0 de (E) on utilise la méthode de la variation de la constante. Ainsi on pose $y_0(x)=\frac{C(x)}{x^2}$ pour $x\in I$. Alors on obtient l'équation $\frac{C'(x)}{x}=\ln(1-2x)$ soit $C(x)=\int^x t\,\ln(1-2t)dt$. Par

intégration par parties, on en déduit que $C(x) = \left[\frac{1}{2}t^2\ln(1-2t)\right]^x + \int^x \frac{t^2}{1-2t}dt = \frac{1}{2}x^2\ln(1-2x) - \int^x \left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-2t}\right)dt = \frac{1}{8}(4x^2-1)\ln(1-2x) - \frac{x(x+1)}{4}$. Par suite, on en déduit que

$$y_0(x) = \frac{1}{8x^2}\big(4x^2-1)\ln(1-2x)\big) - \frac{x+1}{4x}.$$

est solution de (E). **(3pts)**.
En conséquence l'ensemble des solutions de (E) est:

$$\mathcal{E} = \Big\{\frac{1}{8x^2}\big(4x^2-1)\ln(1-2x)\big) - \frac{x+1}{4x} + \frac{C}{x^2},\ C \in \mathbf{R}\Big\} \quad \textbf{(0.5pts)}.$$

Comme S est solution de $\mathcal{E}$, continue en 0 (car $0 \in I$), s'annulant en 0 on cherche une solution de $\mathcal{E}$ prolongeable par continuité en 0 en 0. Or le développement limité d'ordre 2 de $\frac{1}{8x^2}\big(4x^2-1)\ln(1-2x)\big)$ est $\frac{x+1}{4x} + o(1)$ donc en 0, y_0 est prolongeable par continuité et vaut 0. En conséquence $S = y_0$. **(2pt)**. □

2. **(15 pts)** Soit la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\,\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$.
   (a) Montrer que l'ensemble de définition de f est $[0,\infty[$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0,\infty[$.
   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$.
   (d) Montrer que pour tout $x>0$, $f''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\cos(2t)dt$. En utilisant une double intégration par parties, montrer que pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\cos(2t)dt = \frac{x}{x^2+4}$.
   (e) Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$. En déduire que pour tout $x>0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+4)$.
   (f) Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. En déduire que pour tout $x>0$, $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\big(\dfrac{x^2}{x^2+4}\big) - \arctan\big(\dfrac{x}{2}\big) + \dfrac{\pi}{2}$.
   (g) En déduire (en justifiant) que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire également que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Proof. (a) Pour $x \geq 0$, la fonction $g(x,t) = e^{-xt}\,\frac{\sin^2 t}{t^2}$ est localement intégrable sur $]0,\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 par 1: le seul problème d'intégration est donc en $+\infty$. Mais $|g(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ pour tout $t \geq 1$ et $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$ existe. Donc par le théorème de comparaison des intégrales impropres positives, on en déduit que f existe sur $[0,\infty[$. **(1.5pt)**.
(b) La fonction $g(x,t)$ est continue sur $[0,\infty[^2$ et $|g(x,t)| \leq g_0(t)$ avec $g_0(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$ pour tout $(x,t) \in [0,\infty[^2$. Comme $\int_0^\infty g_0(t)dt < \infty$ (en 0, prolongeable par continuité et en ∞ majorée par $1/t^2$), d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, f est continue sur $[0,\infty[$. **(1.5pt)**.
(c) Il est clair que $g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[^2$. De plus, $\frac{\partial}{\partial x}g(x,t) = -e^{-xt}\,\frac{\sin^2 t}{t}$ et pour tout $a>0$, $\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)\Big| \leq g_1(t) = e^{-at}$ avec $\int_0^\infty g_1(t)dt < \infty$. Donc d'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\infty[$, donc sur $]0,\infty[$. **(1.5pt)**.
De la même manière, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t) = e^{-xt}\sin^2 t$ et pour tout $a>0$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)\Big| \leq g_2(t) = e^{-at}$ avec $\int_0^\infty g_2(t)dt < \infty$. Donc d'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,\infty[$, donc sur $]0,\infty[$. **(1pt)**.
(d) On a $f''(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-xt}(1-\cos(2t))\,dt$ soit $f''(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-xt}dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-xt}\cos(2t)\,dt$ car ces deux intégrales sont absolument convergentes sur $]0,\infty[$ et on peut donc séparer la somme. Ainsi on obtient bien que $f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-xt}\cos(2t)\,dt$. **(1pt)**.
Soit $I(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\cos(2t)\,dt$. Alors par intégration par parties, pour $x>0$, $I(x) = \frac{1}{2}\Big([e^{-xt}\sin(2t)]_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-xt}\sin(2t)\,dt\Big)$ soit $I(x) = \frac{1}{2}x\int_0^\infty e^{-xt}\sin(2t)\,dt$. En intégrant encore par parties, $I(x) = \frac{x}{4}\Big(-[e^{-xt}\cos(2t)]_0^\infty - x\int_0^\infty e^{-xt}\cos(2t)\,dt\Big)$ soit $I(x) = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4}I(x)$. On déduit ainsi que $I(x) = \frac{x}{x^2+4}$. **(1.5pt)**.
(e) Pour $x>0$, on a $|f'(x)| \leq \int_0^i nftye^{-xt}dt \leq \frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$. **(1pt)**.

Comme $f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+4}$, on a $f'(x) = \int^x \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+4}\right)dt = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(t^2+4) + c$ avec c tel que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Mais on a aussi $f'(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) + c$ donc $c = 0$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$. **(1.5pts)**.

(f) Pour $x > 0$, on a $|f(x)| \leq \int_0^i nftye^{-xt}dt \leq \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. **(0.5pts)**.

D'après ce qui précède on a $f'(x) = \int^x \left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4)\right)dt$. A l'aide d'une intégration par parties, on obtient l'expression finale de f, qui s'annule bien en $+\infty$. **(1.5pts)**.

(g) Pour finir, on utilise la continuité de f en 0 et donc $f(0) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$ grâce à l'expression de la question (f). **(1pt)**.

Enfin, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = [-\sin^2 t\frac{1}{t}]_0^x + \int_0^\infty \frac{2\sin t\cos t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin(2t)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ par changement de variable. **(1.5pt)**. $\square$