Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Corrections de quelques exercices de la feuille n^o 2: **Séries entières**

2. **(**)** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$?

Proof. On a $R' = R^2$ (définition du rayon de convergence). En effet, la suite $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ est bornée si et seulement si la suite $(a_n^2 (z^2)^n)_{n\geq 0}$ l'est. $\square$

4. **(*)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque:

$$1)\quad a_n = \frac{n^2}{3^n+n},\quad 2)\quad a_n = \frac{n^n}{n!},\quad 3)\quad a_n = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n},\quad 4)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)},$$

$$5)\quad a_n = n^{1/n} - 1,\quad 6)\quad a_n = \frac{ch(n)}{n},\quad 7)\quad a_n = sin(\pi\sqrt{n^2+1}),$$

$$8)\quad a_n = \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\quad 9)\quad a_n = a^{\sqrt{n}}\quad (a \in \mathbf{R}_+^*)$$

Proof. 1) $a_n = \frac{n^2}{3^n+n}$
$R = 3$ (utiliser la règle de D'Alembert)

2) $a_n = \frac{n^n}{n!}$
$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = (1+\frac{1}{n})^n \to e;\ R = \frac{1}{e}$

3) $a_n = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$
$\forall z, \exists n_0$ tel que $(\forall n \geq n_0 |\frac{z}{1+\sqrt{n}}| \leq \frac{1}{2})$ et donc $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{1+\sqrt{n}})^n z^n$ converge; $R = \infty$.

4) $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$
$R = 1$ (utiliser la règle de D'Alembert)

5) $a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
$n^{\frac{1}{n}} - 1 \sim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ car $n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \sim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ d'où $R = 1$ (par la règle de Cauchy)

6) $a_n = \frac{ch(n)}{n}$
$\frac{ch(n)}{n} \sim_{n\to\infty} \frac{e^n}{2n}$; $R = \frac{1}{e}$ (règle de D'Alembert)

7) $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$
$a_n = \sin(\pi n + \frac{\pi}{2n} + o(\frac{1}{n})) \sim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\pi}{2n}$; $R = 1$.

$\square$

5. **(***)** Soit a_n la n-ième décimale de π. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. (*Rappel:* π est irrationnel.)

Proof. D'une part, $\forall n > 0, 0 \leq a_n \leq 9$. D'autre part, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ n'est pas constante nulle à partir d'un certain rang (sinon π serait décimal, ce qui n'est pas le cas), donc la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge. D'où $R = 1$ $\square$

13. **(**)** Soit $a \in \mathbf{R} \backslash \pi \mathbf{Z}$. On considère les séries $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(na)}{(\sin a)^n} \frac{x^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(na)}{(\sin a)^n} \frac{x^n}{n!}$ de somme respective $S(x)$ et $T(x)$.

   (a) Montrer que les rayons de convergence de ces deux séries sont infinis. Calculer leurs sommes. (On calculera d'abord $S(x) + iT(x)$.)

   (b) Montrer directement que T vérifie une équation différentielle du second ordre et retrouver ainsi l'expression de T.

Proof. (a) $|\cos(na)\frac{y^n}{n!}| \leq \frac{y^n}{n!}$. Comme la série $\sum \frac{y^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini (règle de D'Alembert), alors le rayon de convergence de la série $\sum \cos(na)\frac{y^n}{n!}$ ou encore plus $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(na)}{(\sin a)^n} \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini (idem pour $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(na)}{(\sin a)^n} \frac{x^n}{n!}$).

$$\begin{aligned}
S(x) + iT(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(na) + i\sin(na)}{(\sin a)^n} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{ina}}{(\sin a)^n} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} (\frac{xe^{ia}}{\sin a})^n \frac{1}{n!} \\
&= e^{\frac{xe^{ia}}{\sin a}} = e^{x\frac{\cos a}{\sin a} + ix} = e^{x\frac{\cos a}{\sin a}}(\cos x + i \sin x)
\end{aligned}$$

$S(x) = e^{x\frac{\cos a}{\sin a}} \cos x$ et $T(x) = e^{x\frac{\cos a}{\sin a}} \sin x$.

(b)

$$T'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\sin((n+1)a)}{(\sin a)^{n+1}} \frac{x^n}{n!}$$

$$T''(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\sin((n+2)a)}{(\sin a)^{n+2}} \frac{x^n}{n!}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
\sin((n+2)a) &= \sin((n+1)a)\cos a + \cos((n+1)a)\sin a \\
&= \sin((n+1)a)\cos a + \cos(na)\cos a \sin a - \sin(na)\sin^2 a.
\end{aligned}$$

donc,

$$T''(x) - \frac{\cos a}{\sin a} T'(x) - \frac{\cos a}{\sin a} T(x) + S(x) = 0$$

□

14. **(*/**)** Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence :

$\displaystyle\frac{1}{(1+x^2)(1-x)}$ au voisinage de 0 $\qquad$ $\displaystyle\frac{1}{x}$ au voisinage de 2

$\displaystyle\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ au voisinage de 0 $\qquad$ $e^{x(x-2)}$ au voisinage de 1

$\displaystyle\operatorname{Arctan}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ au voisinage de 0 $\qquad$ $\ln(1 + x - 2x^2)$ au voisinage de 0

$\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ au voisinage de 0 $\qquad$ $\displaystyle\frac{e^{-x}}{1+x}$ au voisinage de 0

Proof. (a) $\frac{1}{(1+x^2)(1-x)}$ au voisinage de 0;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x^2)(1-x)} &= \frac{1}{2}\frac{x+1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}\\
&= \frac{1}{2}(x+1)\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{x\geq 0}x^n\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}x^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}x^{2n+1}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}x^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}x^{2n+1}\\
&= \sum_{n\geq 0}(\frac{1+(-1)^{E[\frac{n}{2}]}}{2})x^n.
\end{aligned}$$

(b) $f(x)=\frac{1}{x}$ au voisinage de 2. Alors $f^{(n)}(x)=(n+1)!(-1)^n x^{-(n+1)}$ d'où $\frac{1}{x}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(n+1)!}{2^n}(x-2)^n$.

(c) $\ln(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
\ln(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) &= \frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

(d) $\ln(1+x-2x^2)$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
\ln(1+x-2x^2) &= \ln((1-x)(2x+1))\\
&= \ln(1-x)+\ln(1+2x)\\
&= -\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\\
&= -\sum_{n\geq 1}\frac{1+(-2)^n}{n}x^n
\end{aligned}$$

□

16. **(**)** On considère l'équation différentielle $4xy''+2y'+y=0$, où y est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de la variable réelle x. On se propose de trouver une solution développable en série entière

$$y(x)=\sum_{n\geq 0}a_n x^n,\quad \text{vérifiant } y(0)=1.$$

(a) calculer a_n en fonction de a_{n-1} pour $n\geq 1$. En déduire: $a_n=\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ pour $n\geq 0$. Quel est le domaine de validité de la solution $y(x)$ ainsi obtenue?

(b) Montrer que

$$y(x)=\begin{cases}\mathrm{ch}(\sqrt{-x}) & \text{pour } x\leq 0\\ \cos(\sqrt{x}) & \text{pour } x\geq 0\end{cases}.$$

Proof. (a)

$$\begin{aligned}
4x\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_n x^{n-2}+2\sum_{n\geq 1}na_n x^{n-1}+\sum_{n\geq 0}a_n x^n &= 0\\
4\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_n x^{n-1}+2\sum_{n\geq 1}na_n x^{n-1}+\sum_{n\geq 1}a_{n-1}x^{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \geq 2 2n(2n-1)a_n + a_{n-1} = 0$ et $2a_1 + a_0 = 0$, c'est-à-dire que $\forall n \geq 0,\ 2n(2n-1)a_n + a_{n-1} = 0$. Par récurrence, on a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{2n(2n-1)} a_{n-1} \\ &= \frac{-1}{2n(2n-1)} \frac{-1}{(2n-2)(2n-3)} \dots a_0 \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 \end{aligned}$$

Or $y(0) = a_0 = 1$, donc $\forall n \geq 0\ a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.
(b) 0n a $\cos x = \sum_0 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $ch(x) = \sum_0 \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{x}) &= \sum_0 (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_0 (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}. \end{aligned}$$

$\forall x \leq 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(\sqrt{-x}) &= \sum_0 \frac{\sqrt{-x}^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_0 (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}. \end{aligned}$$

□

1. **(**)** Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\, dx = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Proof. On a $\operatorname{Arctan}(x) = \sum_0 (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan} x}{x} dx &= \int_0^1 \sum_0 (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} dx \\ &= \sum_0 \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

□

Feuille n^o 3:
Intégrales dépendant d'un paramètre

1. **(*)** Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$ existe pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer la limite ℓ de $(I_n)_n$. Trouver un équivalent en $+\infty$ de $J_n = I_n - \ell$.

2. **(*)** Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{n+x}dx$ existe pour tout $n \in \mathbf{N}$. Calculer la limite ℓ de $(I_n)_n$.

3. **(**)** Déterminer, si elle existe, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\infty^\infty \frac{\sin^n x}{x^2}dx$.

4. **(**)** Soit la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^3}}dx$. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbf{N}$ et étudier la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

5. **(**)** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue et bornée. Après avoir montré son existence, calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_\infty^\infty e^{-nx^2} f(x)dx$.

6. **(**)** Pour tout entier $n \geq 3$, on définit $f_n(x) = x(1+x)^{-n}$ pour $x \in [1,\infty[$. Montrer que les f_n sont intégrables sur $[1,\infty[$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction g à déterminer. En déduire que la série de terme général $u_n = \int_1^\infty f_n(x)dx$ converge, et calculer sa somme.

7. **(*)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^1 e^{|x-t|}dt$.

8. **(*)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}dt$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

9. **(**)** Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{\pi/2} t^x \ln(\tan t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,\infty[$.

10. **(**)** Soit $f : [0,\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt = 0$.

11. **(***)** Soit $0 < \alpha < \beta$. Montrer que la fonction $f(t) = (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})t^{-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Après avoir posé $g : (x,t) = (e^{-xt} - e^{-t})t^{-1}$, montrer que g est continue sur $[1,\infty]\times]0,\infty[$ et vérifie le théorème de dérivation d'une intégrale paramétrée (intégration par rapport à t). En déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$ pour $x \geq 1$, puis en posant $x = \beta/\alpha$, déterminer $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$.

12. **(**)** Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\ln(t)dt$. Quel est l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f? Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Sur quel ensemble la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire l'expression de f.

13. **(***)** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-|x+u^2|}}{1+u^2} du$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbf{R}$. Quel est son ensemble de dérivabilité? Montrer que F est intégrable sur $\mathbf{R}$ et montrer que $\int_0^{\infty} F(x)dx = 2\pi$.

14. **(***)** Pour tout $\rho \in \mathbf{R}$ tel que $|\rho| \neq 1$, on pose $I(\rho) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)d\theta$. A l'aide de changements de variables, calculer $I(-\rho)$ et $I(1/\rho)$ en fonction de $I(\rho)$. Montrer que $I(\rho^2) = 2I(\rho)$ et en déduire pour tout $\rho \in]-1, 1[$ que $I(\rho) = 0$, puis l'expression de $I(\rho)$ pour $|\rho| > 1$.

15. **(***)** On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et calculer $F'(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

16. **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt$. Calculer f' et en déduire que f est solution d'une équation différentielle dont la résolution permet de donner l'expression exacte de f.

17. **(***)** Soit a et b deux entiers non nuls. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit le polynôme $P_n(x) = x^n(bx-a)^n/n$.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en $x = 0$ et $x = a/b$.
    (b) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
    (c) On suppose que l'on peut écrire π sous la forme $\pi = a/b$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite non nulle à valeur dans $\mathbf{Z}$. En conclure que π est irrationnel.
    (d) Soit $r \in \mathbf{Q}$ un rationnel strictement positif. En considérant la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $J_n = \int_0^r P_n(t)e^t dt$, montrer que e^r n'est pas un rationnel.

18. **(***)** Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x > 0$.
    (a) En utilisant le changement de variable $t = x + u\sqrt{x}$, montrer que $\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\,(\frac{x}{e})^x \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,u)du$, où f est une fonction à préciser, nulle pour tout couple (x,u) tel que $u \leq -\sqrt{x}$.
    (b) Déterminer la limite de f à u fixé quand $x \to \infty$.
    (c) Pour $x \geq 1$, montrer que pour tout $u \geq 0$, on a $0 < f(x,u) \leq (1+u)e^{-u}$, puis que pour $u_in] - \sqrt{x}, 0[$, $0 < f(x,u) \leq e^{-u^2/2}$.
    (d) En déduire que $\Gamma(x+1) \sim (x/e)^x\sqrt{2\pi x}$ quand $x \to \infty$, puis retrouver le célèbre équivalent $n \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$ quand $n \to \infty$.

19. **(***)** Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} \sin(1/t)dt$.

20. **(***)** Montrer que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t)\,\ln t}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

21. **(***)** Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Feuille n^o 4:

Intégrales multiples

1. **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty[^2,\ x+y \leq 1\}$.

2. **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

3. **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty[^2,\ x^2+y^2 \leq a^2\}$ avec $a>0$ fixé.

4. **(*)** A l'aide du changement de variable $x' = x/a$ et $y' = y/b$, calculer $\displaystyle\int\int_\Delta (x^2-y^2)dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty[^2,\ x^2/a^2+y^2/b^2 \leq 1\}$ avec a, $b>0$ fixés.

5. **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int\int_\Delta xyz\, dxdydz$, puis $\displaystyle\int\int\int_\Delta (x+y+z+1)^{-2}dxdydz$, où $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,\infty[^3,\ x+y+z \leq 1\}$.

6. **(*)** Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(x+y-z)\, dxdy$.

7. **(**)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta x\, \cos(xy)\, \cos^2(rx)\, dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in]0,1/2[\times]0,r[\}$ avec $r>0$ fixé.

8. **(**)** Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty (x+2y)^\alpha\, dxdy$ existe, auquel cas, calculer I_α. Même question pour $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x+2y)^\alpha\, dxdy$.

9. **(***)** Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\sin x}{x+y^\alpha}dxdy$ existe (l'intégrale est-elle alors semi-convergente?). Même question pour $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{\sin x}{x+y^\alpha}dxdy$.

10. **(***)** Montrer que l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\Big(\frac{1}{(x+y)^2}\Big)dxdy$ existe. Est-elle absolument ou semi-convergente?

11. **(**)** Calculer le volume de l'intersection entre la boule unité et un cylindre dont l'axe principal passe en 0 et le rayon est $0<r<1$.

12. **(**)** Calculer le volume de l'ensemble $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2+z^2 \leq a^2 \ \text{ et } \ y^2+z^2 \leq a^2\}$ avec $a>0$ (on pourra commencer par tracer Δ).

13. **(**)** Montrer que la fonction $\phi:\ x \in \mathbf{R} \mapsto \int_x^\infty e^{-t^2}dt$ existe sur $\mathbf{R}$, puis qu'elle est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Calculer $\int_0^\infty \phi(x)dx$.

14. **(***)** Pour $(a,b) \in]1,\infty[^2$, calculer $\displaystyle\int \ln\left(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\right)dt$ (on pourra introduire une fonction à deux variables et utiliser le Théorème de Fubini).

15. **(***)** Calculer le volume d'une boule de rayon est $r > 0$ dans $\mathbf{R}^n$.

16. **(***)** Soit $\Delta' = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2,\ u \leq 1 \ \text{ et } \ -u \leq v \leq u\}$.
    (a) Faire un tracé de Δ'.
    (b) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta'} u^2 e^{uv} du dv$.
    (c) Soit le changement de variable $\psi(u,v) = ((u+v)/\sqrt{2}, (u+v)/\sqrt{2})$. Est-ce bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur Δ'? Quelle transformation géométrique représente ce changement de variable? Déterminer $\Delta = \psi(\Delta')$.
    (d) Effectuer ce changement de variable pour en déduire la valeur de $\displaystyle\int\int_{\Delta} (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dx dy$.

17. **(***)** Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ y \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.
    (a) Tracer de Δ.
    (b) A l'aide d'un changement de variable en polaire, calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

18. **(***)** Soit A et B deux matrices carrées $(2,2)$ symétriques et définies positives. Montrer (en utilisant la diagonalisation de A) que $\displaystyle\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(u,v)A^t(u,v)} du dv = \frac{\pi}{\det A}$. En utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\det(A+B) \geq 4\sqrt{\det A \, \det B}$.