*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

**Licence M.A.S.S. deuxième année** 2008 – 2009

Corrections de quelques exercices de la feuille $n^o$ 3:
**Intégrales dépendant d'un paramètre**

(3) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^n x}{x^2}dx$.

*Proof.* Il y a deux problèmes de convergence: en $\pm\infty$ et en 0. En 0 dès que $n \geq 2$, $\frac{\sin^n x}{x^2}$ est prolongeable par continuité car $\sin^n x \sim x^n$; donc pas de problème pour la convergence. En $+\infty$, $|\sin^n x| \leq 1$ et $\int_1^\infty x^{-2}dx$ existe: donc il y a bien convergence de l'intégrale du fait du Théorème de comparaison. On ne peut pas utiliser directement le théorème de convergence monotone car $\sin^n x$ change de signe, mais on peut le faire avec $\left(\frac{|\sin^n x|}{x^2}\right)_n$ car cette suite de fonctions décroît avec $n$ (on a bien pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq |\sin^{n+1} x| \leq |\sin^n x|$. Or pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\, k \in \mathbf{Z}\}$, $\frac{|\sin^n x|}{x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}\setminus\{\pi/2+k\pi,\, k\in\mathbf{Z}\}}\frac{|\sin^n x|}{x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\sin^n x|}{x^2}dx = 0$. On en déduit que $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^n x}{x^2}dx = 0$. □

(5) **(**)** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue et bornée. Après avoir montré son existence, calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-nx^2}f(x)dx$.

*Proof.* Comme $f$ est continue et bornée sur $\mathbf{R}$, le seul problème de convergence de l'intégrale a lieu en $\pm\infty$. On peut utiliser le Théorème de comparaison puisque pour $x \geq 1$, $\left|e^{-nx^2}f(x)\right| \leq e^{-nx}\sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|$ (car $f$ bornée sur $\mathbf{R}$) et $\int_1^\infty e^{-nx}dx = -\frac{1}{n}[e^{-nx}]_1^\infty$ existe (on procède pareillement en $-\infty$).
On fait le changement de variable $y = \sqrt{n}x$ (qui est bien un difféomorphisme) et ainsi $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-nx^2}f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}f(y/\sqrt{n})dy$. Soit $f_n(y) = e^{-y^2}f(y/\sqrt{n})$ pour $n \in \mathbf{N}^*$. On peut appliquer le Théorème de Lebesgue à la suite de fonctions $(f_n)$ car $|f_n(y)| \leq \sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|e^{-y^2}$ pour tout $y \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ et $\int_{\mathbf{R}}e^{-y^2}dy$ existe (on majore par $e^{-|y|}$) et pour tout $y \in \mathbf{R}$, $f_n(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)e^{-y^2}$. Ainsi $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}f(y/\sqrt{n})dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy$. Or on sait que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2/2}dy = 1$ (densité d'une loi gaussienne centrée réduite), d'où avec le changement de variable $z = y/\sqrt{2}$, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$. En rassemblant tout cela on montre que $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-nx^2}f(x)dx = f(0)$. □

(9) **(***)** Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{\pi/2}t^x\ln(\tan t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,\infty[$.

*Proof.* Pour $x > -1$, il y a des problèmes de convergence de l'intégrale en 0 et en $\pi/2$. En 0, $\tan t \sim t$ d'où $t^x\ln(\tan t) \sim t^x\ln t$. Pour $x > 0$, on peut prolonger cette fonction par continuité. Pour $-1 < x \leq 0$, on peut écrire que pour tout $y$ tel que $-1 < y < x$, alors pour $t$ suffisamment proche de 0, $|t^x\ln t| \leq t^y$ (ceci étant lié au fait que le logarithme est négligeable devant toute fonction puissance). Or $t^y$ est intégrable en 0, donc $t^x\ln(\tan t)$ également. En $\pi/2$, $t^x\ln(\tan t) \sim (\pi/2)^x\ln(\tan t)$. Mais $\ln(\tan t)$ est intégrable en $\pi/2$. En effet, pour $\pi/4 \leq a < \pi/2$, $\int_{\pi/4}^a\ln(\tan t)dt = \int_1^{\tan a}\frac{\ln y}{1+y^2}dy$ avec le changement de variable $y = \tan t$ et il est facile de voir que pour $y \geq 1$ alors $\frac{\ln y}{1+y^2} \leq y^{-3/2}$ avec $\int_1^\infty y^{-3/2}dy$ qui existe. Donc d'après le Théorème de comparaison, $\int_{\pi/4}^\infty\ln(\tan t)dt$ existe et ainsi $\int_0^{\pi/2}t^x\ln(\tan t)dt$ existe.
La fonction $f : (x,t) \mapsto t^x\ln(\tan t)$ est continue sur $]-1,\infty[\times]0,\pi/2[$ et pour tout $x \in [m,M]$ où $-1 < m < M < +\infty$, on peut dominer $f$ par l'inégalité $|f(x,t)| \leq (t^m\mathbb{I}_{0<t\leq1} + t^M\mathbb{I}_{1\leq t<\pi/2})|\ln(\tan t)| = g(t)$ et d'après ce qui précède $\int_0^{\pi/2}g(t)dt$ existe. On en déduit ainsi grâce au Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que $x \mapsto \int_0^{\pi/2}t^x\ln(\tan t)dt$ est continue sur $[m,M]$ pour tout $-1 < m < M < +\infty$, donc sur $]-1,\infty[$.

La dérivée $k$-ème en $x$ de $t^x \ln(\tan t)$ est $(\ln t)^k t^x \ln(\tan t)$ et pour $x \in [m, M]$ où $-1 < m < M < +\infty$, on peut dominer $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ par l'inégalité $|\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)| \leq (t^m \mathbb{I}_{0<t\leq 1} + t^M \mathbb{I}_{1\leq t<\pi/2})|\ln(\tan t)|\,|\ln t|^k = g_k(t)$ et d'après ce qui précède $\int_0^{\pi/2} g_k(t)dt$ existe. Ainsi, grâce au Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, la fonction $x \mapsto \int_0^{\pi/2} t^x \ln(\tan t)dt$ est donc dérivable $k$ fois sur $[m, M]$ pour tout $-1 < m < M < +\infty$, donc sur $]-1, \infty[$. Elle est donc bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, \infty[$. □

(10) **(***)** Soit $f : [0, \infty[ \to \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt = 0$.

*Proof.* Notons $F(z) = \int_0^z f(t)dt$. D'après l'énoncé on sait que $\lim_{z\to\infty} F(z)$ existe. Par ailleurs, avec une intégration par parties $\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt = F(x) - \frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt$. Mais $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt = \lim_{z\to\infty} F(z)$. En effet, pour tout $m > 0$ et $x > m$, $\frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^m F(t)dt + \frac{x-m}{x}\frac{1}{x-m}\int_m^x F(t)dt$. Mais d'après le théorème de la moyenne, il existe $c$ tel que $m \leq c \leq x$ vérifiant $F(c) = \frac{1}{x-m}\int_m^x F(t)dt$. Donc lorsque $x \to \infty$, $\frac{1}{x}\int_0^m F(t)dt \to 0$ (car $\int_0^m F(t)dt$ existe et est fini) et $\frac{x-m}{x}\frac{1}{x-m}\int_m^x F(t)dt \to F(c)$. Ce résultat étant valable pour tout $m$, on peut choisir $m$ aussi grand que l'on veut et on a donc bien $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt = \lim_{z\to\infty} F(z)$. Par conséquent, pour $x \to \infty$, $F(x) - \frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt \to 0$ et donc $\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt \to 0$. □

(11) **(***)** Soit $0 < \alpha < \beta$. Montrer que la fonction $f(t) = (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})t^{-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Après avoir posé $g : (x,t) = (e^{-xt} - e^{-t})t^{-1}$, montrer que $g$ est continue sur $[1, \infty] \times ]0, \infty[$ et vérifie le théorème de dérivation d'une intégrale paramétrée (intégration par rapport à $t$). En déduire $\int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$ pour $x \geq 1$, puis en posant $x = \beta/\alpha$, déterminer $\int_0^\infty f(t)dt$.

*Proof.* Montrons que $\int_0^i nftyf(t)dt$ existe. Il y a des problèmes de convergence en 0 et en $\infty$. En 0, $e^{-\beta t} - e^{-\alpha t} \sim (1 - \beta t) - (1 - \alpha t) \sim (\alpha - \beta)t$, donc $f$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0. En $+\infty$, $e^{-\beta t} - e^{-\alpha t} \sim -e^{-\alpha t}$ car $\beta > \alpha > 0$, donc $f(t) \sim -e^{-\alpha t}t^{-1}$. En conséquence, pour $t$ suffisamment grand, $f(t) \leq t^{-2}$, donc d'après le Théorème de comparaison $f$ est intégrable en $+\infty$ (car $t^{-2}$ l'est).
La fonction $g$ est continue sur $[1, \infty] \times ]0, \infty[$ comme somme et fraction de fonctions continues sur $[1, \infty] \times ]0, \infty[$. On sait que pour $u \geq 0$, $1 - u \leq e^{-u}$. Ainsi, pour tout $1 \leq x \leq m$ et $t \in [0, 1]$, $|g(x,t)| = (e^{-t} - e^{-xt})t^{-1} \leq (1 - (1 - xt))t^{-1} \leq m$. Pour $t \geq 1$, $|g(x,t)| = (e^{-t} - e^{-xt})t^{-1} \leq e^{-t}t^{-1}$. Posons $h(t) = m\mathbb{I}_{0<t\leq 1} + e^{-t}t^{-1}\mathbb{I}_{t>1}$. Alors on a bien $|g(x,t)| \leq h(t)$ et $\int_0^\infty h(t)$ existe. Donc grâce au Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre $x \mapsto \int_0^\infty g(x,t)dt$ est continue sur $[1, m]$ pour tout $m \geq 1$, donc elle est continue sur $[1, \infty[$. Pour la dérivation, il faut dériver $g$ par rapport à $x$ et on obtient $\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = -e^{-xt}$ pour tout $x \geq 1$ et $t > 0$. Mais $\left|\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leq e^{-t}$ pour tout $x \geq 1$ avec $\int_0^\infty e^{-t}dt$ qui existe, donc grâce au Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, on arrive bien à montrer que $x \mapsto \int_0^\infty g(x,t)dt$ est dérivable sur $[1, \infty[$ et $\int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^\infty e^{-xt}dt = -\frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$. Aussi $\int_0^\infty g(x,t)dt = -\ln x$ donc avec $x = \beta/\alpha$ et le changement de variable $t' = t/\alpha$, $\int_0^\infty g(\beta/\alpha, t)dt = \int_0^\infty f(t)dt = \ln\alpha - \ln\beta$. □

(12) **(**)** Soit $f(x) = \int_0^1 e^{-tx}\ln(t)dt$. Quel est l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de $f$? Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Sur quel ensemble la fonction $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Trouver une équation différentielle vérifiée par $f$ et en déduire l'expression de $f$.

*Proof.* L'intégrale $\int_0^1 e^{-tx}\ln(t)dt$ pose un problème de convergence uniquement en 0. Mais en 0, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^{-tx}\ln(t) \sim \ln t$ et $\int_0^1 \ln t dt$ existe. Donc d'après le Théorème de comparaison, $f$ existe pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Il est clair que la fonction $(x,t) \mapsto e^{-tx}\ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R} \times ]0, 1]$. De plus pour tout $m \in \mathbf{R}$ et pour tout $x \geq m$, $|e^{-tx}\ln(t)| \leq e^{-tm}\ln t$ pour tout $t \in ]0, 1]$ et $\int_0^1 e^{-tm}\ln t$ existe. On en déduit grâce au Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que $f$ est continue sur $[m, \infty[$, donc sur $\mathbf{R}$. On peut dériver par rapport à $x$ la fonction $f(x,t) = e^{-tx}\ln(t)$ et on a $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = -te^{-tx}\ln(t)$. Il est encore possible de majorer $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ par la fonction $e^{-tm}\ln t$ pour tout $x \geq m$ et $t \in ]0, 1]$, fonction intégrable sur $]0, 1]$ et ainsi grâce au Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, $f$ est dérivable sur $[m, \infty[$, donc sur $\mathbf{R}$. On obtient de même que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
La dérivée de $t\ln t$ est $1 + \ln t$ et une primitive (en $t$) de $e^{-tx}$ est $-e^{-tx}/x$, donc on peut faire une intégration par parties de $f'(x) = -\int_0^1 te^{-tx}\ln t dt$ et on obtient $f'(x) = -[-t\ln te^{-tx}/x]_0^1 - \int_0^1 (1 + \ln t)e^{-tx}/x dt = [e^{-tx}/x^2]_0^1 - f(x)/x = (e^{-x} - 1)/x^2 - f(x)/x$. Ainsi $f$ est bien solution d'une équation différentielle.
On résoud cette équation en trouvant d'abord les solutions de l'équation homogène soit $f'(x) + f(x)/x = 0$, ce qui implique que $f(x) = \frac{C}{x^2}$ pour tout $C \in \mathbf{R}$ et $x \in ]-\infty, 0[$ ou $]0, \infty[$.

□

(14) **(***)** Pour tout $\rho \in \mathbf{R}$ tel que $|\rho| \neq 1$, on pose $I(\rho) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)d\theta$. A l'aide de changements de variables, calculer $I(-\rho)$ et $I(1/\rho)$ en fonction de $I(\rho)$. Montrer que $I(\rho^2) = 2I(\rho)$ et en déduire pour tout $\rho \in ]-1, 1[$ que $I(\rho) = 0$, puis l'expression de $I(\rho)$ pour $|\rho| > 1$.

*Proof.* Dès que $|\rho| \neq 1$ alors $I(\rho)$ existe. En effet, $1-2\rho\cos\theta+\rho^2 = (\rho-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$, donc $1-2\rho\cos\theta+\rho^2 > 0$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$: l'intégrale n'est donc jamais impropre.
Avec $t = \pi - \theta$ alors $dt = -d\theta$, et $I(\rho) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\rho\cos(\pi - t) + \rho^2)dt = I(-\rho)$. De plus, $I(1/\rho) = \int_0^\pi \ln((\rho^2 + 2\rho\cos\theta + 1)/\rho^2)d\theta = I(\rho) - 2\pi\ln|\rho|$ dès que $\rho \neq 0$.
Comme les intégrales sont absolument convergentes, $I(\rho)+I(-\rho) = \int_0^\pi \ln((1+\rho^2)^2-4\rho^2\cos^2\theta)d\theta = \int_0^\pi \ln(1+\rho^4 - 2\rho^2\cos(2\theta))d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \rho^4 - 2\rho^2\cos\theta')d\theta'$ avec $\theta' = 2\theta$. En découpant $\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}$ et avec un changement de variable $\theta'' = 2\pi - \theta'$, $\int_\pi^{2\pi} = \int_0^\pi$. En conclusion, $\int_0^\pi \ln(1 + \rho^4 - 2\rho^2\cos(2\theta))d\theta = I(\rho^2)$, et comme $I(\rho) = I(-\rho)$, on a bien $I(\rho^2) = 2I(\rho)$.
Pour tout $\rho \in ]-1, 1[$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $I(\rho^{2n}) = 2^n I(\rho)$. On aimerait passer à la limite et ainsi considérer $\lim_{n\to\infty} I(\rho^{2n})$. On va montrer que $I$ est continue sur $]-1, 1[$. La fonction $(\rho, \theta) \mapsto \ln(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)$ est continue sur $]-1, 1[\times[0, \pi]$. De plus pour tout $|\rho| < 1$, $1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2 = (1 - \rho\cos\theta)^2 + \sin^2\theta \in [\sin^2\theta, 2 + 2|\cos\theta|]$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$. Donc $\left|\ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\right| \leq \max\left(2|\ln(\sin\theta)|, \ln(2 + 2|\cos\theta|)\right) = g(\theta)$ pour $\theta \in ]0, \pi[$. Mais il est clair que $\int_0^\pi \ln(2 + 2|\cos\theta|d\theta$ comme intégrale définie, et si $\int_0^\pi |\ln(\sin\theta)|d\theta$ est une intégrale impropre, elle a des problèmes de convergence en 0 et en $\pi$, mais en 0 par exemple, $|\ln(\sin\theta)| \sim -\ln\theta$ et $\ln\theta$ est intégrable en 0; $\int_0^\pi g(\theta)d\theta$ existe. Par suite, $I$ est bien continue sur $]-1, 1[$. En conséquence pour tout $|\rho| < 1$, $\lim_{n\to\infty} I(\rho^{2n}) = I(0)$ et donc $I(\rho) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}I(\rho^{2n}) = 0$.
Enfin comme $I(\rho) = I(1/\rho) - 2\pi\ln|\rho|$ pour $|\rho| > 1$, on en déduit qu'alors $I(1/\rho) = 0$ et donc $I(\rho) = -2\pi\ln|\rho|$ (on s'aperçoit d'ailleurs que $I$ est continue en $\pm1$). □

(15) **(***)** On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et calculer $F'(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$.

*Proof.* L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt$ a un problème de convergence en 0 et en $\infty$. Mais comme $\sin t/t$ est prolongeable par continuité en 0, il n'y a en fait pas de problème de convergence en 0, et ceci pour tout $x \in \mathbf{R}_+$. En $+\infty$, pour tout $x > 0$, $\left|\frac{\sin t}{t}e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$ et $\int_0^\infty e^{-tx}dt$ existe donc d'après le Théorème de comparaison, $F$ existe. De plus, pour $x = 0$, $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ existe (on peut faire une intégration par parties), donc $F$ existe pour $x \in \mathbf{R}_+$.
Soit $f(x, t) = \frac{\sin t}{t}e^{-tx}$. Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+\times]0, \infty[$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le même ensemble. De plus, pour tout $a > 0$ et $x \geq a$, $|f(x, t)| \leq e^{-at}$ avec $\int_0^\infty e^{-at}dt$ qui existe et $\frac{\partial}{\partial x}f(x, t) = -\sin te^{-tx}$ vérifie $\left|\frac{\partial}{\partial x}f(x, t)\right| \leq e^{-at}$ également. Donc $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, \infty[$ pour tout $a > 0$, ce qui signifie que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ avec $F'(x) = -\int_0^\infty \sin te^{-tx}dt$.
En 0, il est clair que $F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$. Pour montrer la continuité de $F$ en 0, on ne peut pas utiliser le Théorème de convergence dominée car $F$ est une intégrale semi-convergente en 0. Soit $\phi(A) = \int_0^A \frac{\sin t}{t}dt$ pour $A > 0$. Alors pour tout $x \geq 0$, par intégration par parties, $\int_0^A f(x, t)dt = e^{-xA}\phi(A) + x\int_0^A \phi(y)e^{-xy}dy$. Comme $\phi$ est bornée, pour $x > 0$, on peut passer à la limite $A \to \infty$, alors $F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt + x\int_0^\infty \phi(y)e^{-xy}dy$. Par changement de variable, $z = xy$, on obtient que $x\int_0^\infty \phi(y)e^{-xy}dy = \int_0^\infty \phi(z/x)e^{-z}dz$. On peut alors prolonger la fonction $x \mapsto \phi(z/x)$ définie sur $]0, \infty]$ par une fonction $g(x, z) = \phi(z/x)$ pour $x > 0$ et $g(0, z) = \lim_{u\to\infty}\phi(u)$ pour tout $z > 0$. Il nous revient donc de montrer la continuité de $\int_0^\infty g(x, z)e^{-z}dz$. La fonction $(x, z) \mapsto g(x, z)e^{-z}$ est continue sur $[0, \infty[\times]0, \infty[$ et de plus, $|g(x, z)|e^{-z} \leq g(0, z)e^{-z}$ pour tout $x \geq 0$ avec $\int_0^\infty e^{-z}dz$ qui existe. Donc on a bien continuité de la fonction $x \mapsto \int_0^\infty g(x, z)e^{-z}dz$ en 0 et donc $\lim_{x\to0} F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt + \lim_{x\to0} x\int_0^\infty g(0, z)e^{-z}dz = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = F(0)$: $F$ est bien continue en 0. Ce raisonnement ne peut s'appliquer à $F'$ en 0 car $F'(0)$ n'existe pas...).
Il est possible de calculer explicitement $F'(x)$ grâce à une double intégration par parties:
$\int_0^x \sin te^{-xt}dt = [-\cos te^{-xt}]_0^\infty - x\int_0^\infty \cos te^{-xt}dt = 1 - x\big([\sin te^{-xt}]_0^\infty + x\int_0^\infty \sin te^{-xt}dt = 1 - x^2\int_0^x \sin te^{-xt}dt$.
Donc $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, ce qui implique que $F(x) = -\mathrm{Arctan}(x) + F(0)$. Mais comme $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ car $|F(x)| \leq \int_0^1 e^{-xt}dt \leq \frac{1}{x}$ alors $F(0) = \lim_{x\to\infty}\mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$. □

(21) **(***)** Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

*Proof.* Il est clair que l'on doit avoir $x \geq 0$ (sinon le logarithme n'est pas défini). Le seul problème possible est en 0, mais alors $f(0) = \int_0^0 \frac{1}{\ln t} dt = 0$ par définition.

Par changement de variables, $y = \ln t$ et $z = y/\ln x$, on obtient $f(x) = \int_1^2 \frac{x^z}{z} dz$. Une telle fonction est continue et dérivable sur $[0, \infty[$ car l'intégrale est définie sur un compact et la fonction $(x, z) \mapsto \frac{x^z}{z}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \infty[ \times [1, 2]$. Il est clair que $f'(x) = \int_1^2 x^z dz = [\frac{1}{\ln x} x^z]_1^2 = \frac{x^2 - x}{\ln x}$, donc $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty = \lim_{x\to\infty} f(x)$. $\square$