Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S.

Feuilles de TD du cours d'Analyse S4

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Intégrales généralisées

(1) **(**)** Calculer les intégrales définies suivantes :
$A = \int_1^2 t^\alpha dt$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad B = \int_0^1 \frac{2}{t^2+t+2}dt \quad C = \int_{-2}^0 \sqrt{4-t^2}dt$

(2) **(*)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
$A = \int_0^1 tdt \qquad B = \int_0^1 \frac{2}{t-1}dt \qquad C = \int_0^1 \ln(t)dt$
$D = \int_0^1 \exp(-\frac{2}{t})dt \quad E = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t(1-t)}} \quad F = \int_0^1 \frac{t-1}{\sqrt{t^3-t^2}}dt$

(3) **(**)** Déterminer la nature (semi-convergente, absolument convergente, divergente) des intégrales:
$A = \int_0^{+\infty} \cos(t)dt \quad B = \int_0^{+\infty} \cos(e^{-t})dt \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t+1)}{t^2+1}dt \quad D = \int_0^{4\pi} \frac{1}{\sin t}dt$

(4) **(**)** Après avoir montré son existence, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

(5) **(**)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
$A = \int_1^{+\infty} tdt \qquad B = \int_1^{+\infty} \frac{3}{t(2t-1)}dt \quad C = \int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{t^2+t}}dt$
$D = \int_2^{+\infty} (\ln t)^{-t}dt \qquad E = \int_1^{+\infty} \exp(-\sqrt{t})dt \quad F = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{2t^3+3}}dt$
$G = \int_1^{+\infty} (1-\cos(\frac{1}{t}))dt \quad H = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t}dt \quad I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$

(6) **(*)** Après avoir montré leur existence, calculer les intégrales suivantes:
$A = \int_2^{+\infty} \frac{t}{t^2-2t+1}dt \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3|t|}{t^3}dt \quad C = \int_0^{+\infty} \exp(-t)dt$

(7) **(**)** On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer pour quelles valeurs de n, I_n existe.
   (b) Calculer I_0 et I_1. Déterminer une relation de récurence entre I_{n+1} et I_n.
   (c) Montrer que I_n est une suite convergente dont on donnera la limite. La série $\sum I_n$ est-elle convergente?

(8) **(***)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ (on pourra par exemple utiliser la comparaison avec une série). Réciproquement, si $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge-t-elle?

Feuille n^o 2:

Intégrales multiples

(1) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^3}$ où $\Delta = [0,1[^2$.

(2) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^3}$ où $\Delta = \{(x,y)\in[0,\infty[^2,\, x+2y\le 2\}$.

(3) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^3}$ où $\Delta = \{(x,y)\in[0,\infty[^2,\, x+y\le 2\}$.

(4) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{x}{\sqrt{x-y}}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\, 0\le y\le x\le 2\}$.

(5) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in[0,\infty[^2,\, x^2+y^2\le a^2\}$ avec $a>0$ fixé.

(6) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta x\,ydxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in[0,\infty[^2,\, x^2/a^2+y^2/b^2\le 1\}$ avec $a,\, b>0$ fixés.

(7) (*) Calculer $\displaystyle\int\int\int_\Delta (x+y)z\,dxdydz$, puis $\displaystyle\int\int\int_\Delta (x+y+2z+1)^{-2}dxdydz$, où $\Delta = \{(x,y,z)\in [0,\infty[^3,\, x+y+2z\le 2\}$.

(8) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta x\,\cos(xy)\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in]0,1/2[\times]0,\frac{\pi}{2}[\}$.

(9) (***) Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty (x+2y)^\alpha\,dxdy$ existe, auquel cas, calculer I_α. Même question pour $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x+2y)^\alpha\,dxdy$.

(10) (***) Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\sin x}{x+y^\alpha}dxdy$ existe (l'intégrale est-elle alors semi-convergente?). Même question pour $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{\sin x}{x+y^\alpha}dxdy$.

(11) (**) Calculer le volume de l'ensemble $\Delta = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, x^2+z^2\le a^2 \text{ et } y^2+z^2\le a^2\}$ avec $a>0$ (on pourra commencer par tracer Δ).

(12) (***) Pour $(a,b)\in]1,\infty[^2$, calculer $\displaystyle\int \ln\Big(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\Big)dt$ (on pourra introduire la fonction à deux variables $(u,t)\mapsto(u-\cos t)^{-1}$ et utiliser le Théorème de Fubini).

(13) (***) Calculer le volume d'une boule de rayon $r>0$ dans $\mathbb{R}^n$.

(14) (***) Soit $\Delta' = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\, u\le 1 \text{ et } -u\le v\le u\}$.
  (a) Faire un tracé de Δ'.
  (b) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta'} u^2e^{uv}dudv$.
  (c) Soit le changement de variable $\psi(u,v) = \big((u+v)/\sqrt{2},(u+v)/\sqrt{2}\big)$. Est-ce bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur Δ'? Quelle transformation géométrique représente ce changement de variable? Déterminer $\Delta=\psi(\Delta')$.
  (d) Effectuer ce changement de variable pour en déduire la valeur de $\displaystyle\int\int_\Delta (x+y)^2e^{x^2-y^2}dxdy$.

(15) (***) Soit $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\, y\le x^2+y^2\le 1\}$.
  (a) Tracer de Δ.
  (b) A l'aide d'un changement de variable en polaire, calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

Feuille n^o 3:

Intégrales dépendant d'un paramètre

(1) **(*)** Montrer que $I_n = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\frac{1}{n}+\sqrt{x}}dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliciter la limite ℓ de $(I_n)_n$.

(2) **(**)** Montrer que $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(I_n)_n$. Même question avec $J_n = \int_0^1 \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}dx$.

(3) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x}}dx$.

(4) **(**)** Soit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $I_n = \int_1^\infty \frac{1}{x^n\sqrt{x^2+1}}dx$. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ et étudier la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5) **(**)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$. Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx}f(x)dx$.

(6) **(**)** Pour tout entier $n \geq 3$, on définit $f_n(x) = x(1+x)^{-n}$ pour $x \in [1,\infty[$. Montrer que les f_n sont intégrables sur $[1,\infty[$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction g à déterminer. En déduire que la série de terme général $u_n = \int_1^\infty f_n(x)dx$ converge, et calculer sa somme.

(7) **(*)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^1 e^{-|x-t|}dt$ et de $g(x) = \int_0^\infty e^{-|x-t|}dt$.

(8) **(*)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_1^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2}dt$.

(9) **(**)** Mêmes questions mais avec $f(x) = \int_1^2 \frac{\cos(xt)}{t^2}dt$.

(10) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}dt$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(11) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(tx)dt$. Calculer f' et en déduire que f est solution d'une équation différentielle dont la résolution permet de donner l'expression exacte de f. En déduire $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$.

(12) **(***)** Soit $0 < \alpha < \beta$. Montrer que la fonction $f(t) = (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})t^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Après avoir posé $g : (x,t) = (e^{-xt} - e^{-t})t^{-1}$, montrer l'existence et calculer $\int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$ pour $x \geq 1$, puis en posant $x = \beta/\alpha$, déterminer $\int_0^\infty f(t)dt$.

(13) **(**)** Soit $f(x) = \int_0^1 e^{-tx}\ln(t)dt$. Quel est l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f? Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Sur quel ensemble la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire l'expression de f.

(14) **(***)** Soit $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x > 0$.
   (a) En utilisant le changement de variable $t = x+u\sqrt{x}$, montrer que $\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^\infty f(x,u)du$, où f est une fonction à préciser, nulle pour tout couple (x,u) tel que $u \leq -\sqrt{x}$.
   (b) Déterminer la limite de f à u fixé quand $x \to \infty$.
   (c) Pour $x \geq 1$, montrer que pour tout $u \geq 0$, on a $0 < f(x,u) \leq (1+u)e^{-u}$, puis que pour $u_in] - \sqrt{x}, 0[$, $0 < f(x,u) \leq e^{-u^2/2}$.
   (d) En déduire que $\Gamma(x+1) \sim (x/e)^x\sqrt{2\pi x}$ quand $x \to \infty$, puis retrouver le célèbre équivalent $n\!\sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$ quand $n \to \infty$.

(15) **(***)** Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \neq 1$, on pose $I(\rho) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)d\theta$. A l'aide de changements de variables, calculer $I(-\rho)$ et $I(1/\rho)$ en fonction de $I(\rho)$. Montrer que $I(\rho^2) = 2I(\rho)$ et en déduire pour tout $\rho \in]-1,1[$ que $I(\rho) = 0$, puis l'expression de $I(\rho)$ pour $|\rho| > 1$.

(16) **(***)** On pose $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(x)$. En déduire $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

(17) **(**)** Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^x \frac{1}{2+\sin(1/t)} dt$.

(18) **(***)** Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Feuille n^o 4:

Equations différentielles linéaires

(1) **(*)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=0$:

$$y'+2y=0; \quad y'-x\,y=0; \quad e^x y'+y=0; \quad y'+2\ln(x)\,y=0.$$

(2) **(**)** On considère les équations différentielles suivantes avec les conditions initiales $y(0)=0$ (et $y'(0)=1$ pour la quatrième). Montrer qu'il existe une unique solution à ce problème de Cauchy et déterminer une solution maximale.

$$y'=e^y; \quad y'=y^3; \quad y'=\frac{1}{y^2+1}; \quad 2y''=e^y; \quad y'=|y|.$$

(3) **(***)** Existe-t-il des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+2\sqrt{y}=0$?

(4) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(1)=0$:

$$\begin{array}{lll} (1+x)y'=2-y & y'+x\,y=\cos x & 3x\,y'+y=x \\ 2x(1-x)y'+(1+x)y=x & x(x+1)y'+y=0 & x(x^2-1)y'+2y=x\ln x-x^2. \end{array}$$

(5) **(**)** Déterminer une solution maximale des équations différentielles suivantes:

$$y'-y=e^{|x|}; \quad xy'-y=x\ln|x|=0; \quad y'\sin x+y\cos x=2-x; \quad |x|\,y'+y=|x|.$$

(6) **(***)** Chercher les solutions de l'équation différentielle $(x^2-1)y'-y=x^2$. Existe-t-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?

(7) **(*)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=0$:

$$\begin{array}{llll} y''-2y=0 & y''+2y=0 & y''-4y'+4y=x & y^{(3)}-2y''+y=1 \\ y''-3y'+2y=1+2e^x & y''+y'+y=\cos x & y^{(4)}-y'=x & y''+y=e^{-|x|} \end{array}$$

(8) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $y''+2x\,y'+2y=0$ après avoir vérifié que $y(x)=e^{-x^2}$ est solution.

(9) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $(1-x^2)y''+xy'-y=0$ en effectuant le changement de variable $x=\operatorname{ch} t$.

(10) **(**)** Déterminer les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$ en posant $u=x^2y$. Quelle est leur classe?

(11) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $2x^2y''-xy'+2y=x^4\cos x-1$.

Feuille n^o 5:

Séries entières

(1) **(*)** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $0 < |a_n| \leq M$ pour tout n, où M est un nombre positif fixé. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série? Et si $m \leq |a_n| \leq M$ pour tout n avec $m > 0$? Et si $m \leq |a_n| \leq M$?

(2) **(**)** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que $a_n > 0$ pour tout n. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^{-1} z^n$?

(3) **(**)** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n = n$ pour $n = p^2$, avec $p \in \mathbb{N}$, et $a_n = 0$ sinon. Déterminer le rayon de convergence de la série.

(4) **(*/**)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque:

$$a_n = (n^2+2) \quad a_n = \frac{n}{2^n+n} \quad a_n = \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!} \quad a_n = \frac{1}{(1+2n)^{n/3}} \quad a_n = 1+(-1)^n$$
$$a_n = n^{1/\sqrt{n}} - 1 \quad a_n = \frac{sh(n)}{n^2} \quad a_n = \tan(\pi\sqrt{n^2-n}) \quad a_n = (2n)^{-\ln(\ln n)} \quad a_n = a^{n^a} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

(5) **(**)** Soient $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n = e^{-2n}$ si n est impair ou nul et $a_n = (\frac{1}{n})^{n^2}$ si n est pair strictement positif. Quel est le rayon de convergence de la série?

(6) **(**)** Soit a_n la n-ième décimale d'un nombre décimal quelconque. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Traiter la même question avec les décimales de $\sqrt{3}$ (*Rappel:* $\sqrt{3}$ est irrationnel.)

(7) **(**)** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ et telle que $\sum n\, a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?

(8) **(*/**)** Etudier la convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, sans oublier la convergence sur le bord du disque de convergence, lorsque:

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1} \quad a_n = \frac{n+1}{2^n} \quad a_n = \frac{3^n}{(2n)!} \quad a_n = \frac{1}{n+1} \quad a_n = \sqrt{2^{-n}}$$
$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^3} \quad a_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\,3^{2n-1}} \quad a_n = \frac{1}{n^3(-2)^n} \quad a_n = n^{-\ln n}$$
$$a_n = n^{\sin n} \quad a_n = (e^{-n})^{2/n} \quad a_n = \frac{1}{n}\cos(\pi n/3) \quad a_n = \frac{1}{n\ln^2 n} \quad a_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(9) **(***)** Donner un exemple de série entière telle que
   (a) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée converge.
   (b) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée diverge.
   (c) la série numérique associée admet $p \in \mathbb{N}$, nombre fixé, points de divergence sur son cercle de convergence.

(10) **(**)** Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières réelles suivantes :

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^{2n} \quad \sum_{n\geq 0}(1+(-2)^n)x^n \quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{(2n)!} \quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}$$
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}x^{2n} \quad \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^{2n} \quad \sum_{n\geq 0}\cos n\, x^n \quad \sum_{n\geq 0}\frac{\cos(nx)}{n!}x^n.$$

(11) **(***)** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} a_i < \infty$. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *Indication:* introduire $A_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ et utiliser la relation $a_n = A_{n+1} - A_n$.

(12) **(***)** Après avoir montré qu'il existe, calculer le réel $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)n}$.

(13) **(*/**)** Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence:

$2x-3$ au voisinage de 0	$\frac{1}{(1+2x^2)}$ au voisinage de 0	$\frac{x+2}{x-1}$ au voisinage de 2
$\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ au voisinage de 0	$e^{x(x-1)}$ au voisinage de 1	$\ln(1+2x-3x^2)$ au voisinage de 0
$\operatorname{Arctan}\frac{2x}{1+x^2}$ au voisinage de 0	$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ au voisinage de 0	$\frac{e^x-1}{x}$ au voisinage de 0.

(14) **(***)** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$. Développer f en série entière au voisinage de 0. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière et démontrer qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$. En déduire que $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(2n+1)}$, dont on déterminera la valeur.

(15) **(**)** Déterminer les solutions développables en série entière autour de l'origine de l'équation différentielle $xy' - y = 0$. Obtient-on ainsi toutes les solutions? Même question avec l'équation $xy'' - y = 0$.

(16) **(**)** Déterminer les solutions développables en série entière autour de l'origine de l'équation différentielle $2xy'' + 2y' + y = 0$.

(17) **(**)** Déterminer une équation différentielle admettant pour solution $f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. En déduire un développement en série entière de f à l'origine. En déduire également le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (\arcsin x)^2$ à l'origine?

(18) **(**)** Développer en série entière $f(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$. *Indication :* déterminer une équation différentielle satisfaite par f.

(19) **(**)** Démontrer que $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.