Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S.

Feuilles de TD du cours d'Analyse S4

Jean-Marc Bardet (Université Paris 1, SAMOS)

U.F.R. 27 et SAMOS (Centre d'Economie de la Sorbonne, équipe MATISSE)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Equations différentielles linéaires

(1) **(**)** On considère l'équation différentielle $y' = \sin y$ avec $y(0) = y_0$ et $y_0 \in]-\pi, \pi[$. Montrer qu'il existe une unique solution à ce problème de Cauchy. La déterminer lorsque $y_0 = 0$. Si $y_0 \in]0, \pi[$, montrer que toute solution appartient est croissante. Avec le changement de variable $u = \ln|\tan(y/2)|$, déterminer une solution maximale de l'équation lorsque $y_0 \in]0, \pi[$, puis en trouver une lorsque $y_0 \in]-\pi, 0[$.

(2) **(**)** On considère l'équation différentielle $2y'' = e^y$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Montrer qu'il existe une unique solution à ce problème de Cauchy. Déterminer une solution maximale. De même si $y'(0) = y(0) = 0$.

(3) **(*)** Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = \sin(x)$.

(4) **(*)** Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x \cos x$.

(5) **(*)** Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

(6) **(*)** Résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} + 2y'' + y = 1$.

(7) **(*)** Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(\omega x)$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ fixé.

(8) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(1) = 0$:

$$\begin{array}{lll} (2+x)y' = 2 - y & xy' + y = \cos x & 3xy' - 4y = x \\ 2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1 & x(x+1)y' + y = \arctan x & x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2. \end{array}$$

(9) **(**)** Déterminer une solution maximale des équations différentielles suivantes:
$(1+x^2)y' - 2xy = 0$; $y' - 2y = xe^{-|x|}$; $xy' + y - \ln|x| = 0$; $(1 + \frac{1}{x})y' - y = 0$.

(10) **(***)** Chercher les solutions de l'équation différentielle $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$. Existe-t-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?

(11) **(**)** Déterminer une solution maximale des équations différentielles $y' - y \tan x = (1 + \cos x)^{-1}$ et $y' \cos x + y \sin x = 1 + x$.

(12) **(***)** Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y' + y = f(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.

(13) **(***)** Existe-t-il des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2\sqrt{y} = 0$?

(14) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $y'' + y = e^{-|x|}$.

(15) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$ après avoir vérifié que $y(x) = e^{x^2}$ est solution.

(16) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ en effectuant le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$.

(17) **(**)** Déterminer les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ en posant $u = x^2 y$. Quelle est leur classe?

(18) **(***)** Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, monotone et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y'' + y = f(x)$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ et que

cette équation admet une unique solution ayant une limite finie en $+\infty$.

(19) **(**)** Déterminer la solution maximale de l'équation différentielle $y' = -y^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

(20) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $x^2 y'' - 2y' + 2y = x^4 \cos x - 1$ après avoir remarqué que $y(x) = 1$ est solution de l'équation homogène associée.

(21) **(**)** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant $f'(t) = f(1/t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Feuille n^o 2:

Séries entières

(1) **(*)** Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et deux nombres h et k tels que $0 < h < |a_n| < k$ pour tout n. Quel est le rayon de convergence de la série ?

(2) **(**)** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$?

(3) **(*)** Soient $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n = n$ si n est impair ou nul et $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$ si n est pair strictement positif. Quel est le rayon de convergence de la série?

(4) **(*)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque:

$$1)\quad a_n = \frac{n^2}{3^n+n},\quad 2)\quad a_n = \frac{n^n}{n!},\quad 3)\quad a_n = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n},\quad 4)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)},$$

$$5)\quad a_n = n^{1/n}-1,\quad 6)\quad a_n = \frac{ch(n)}{n},\quad 7)\quad a_n = sin(\pi\sqrt{n^2+1}),$$

$$8)\quad a_n = \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\quad 9)\quad a_n = a^{\sqrt{n}}\quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

(5) **(***)** Soit a_n la n-ième décimale de π. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. (*Rappel :* π est irrationnel.)

(6) **(**)** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ et telle que $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?

(7) **(*/**)** Etudier la convergence des séries entières suivantes, sans oublier la convergence sur le bord du disque de convergence :

$$1)\quad \sum \frac{n+1}{n^2+1} z^n,\quad 2)\quad \sum \frac{(n+1)^2}{2^n} z^n,\quad 3)\quad \sum \frac{3^n}{n!} z^n,\quad 4)\quad \sum \frac{1}{n} z^n,$$

$$5)\quad \sum \sqrt{n} z^n,\quad 6)\quad \sum \frac{1}{n^3} z^n,\quad 7)\quad \sum \left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}\right) z^n,$$

$$8)\quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{2n-1}} z^n,\quad 9)\quad \sum \frac{1}{n^2 2^n} z^n,\quad 10)\quad \sum n z^n,\quad 11)\quad \sum n^{(-1)^n} z^n,$$

$$12)\quad \sum z^{n!},\quad 13)\quad \sum (\sin n)^n z^n,\quad 14)\quad \sum (1+in) z^n,\quad 15)\quad \sum \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} z^n.$$

(8) **(**)** Rayon de convergence et étude sur le cercle de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\, x^n$.

(9) **(***)** Donner un exemple de série entière telle que

(a) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée converge.
(b) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée diverge.
(c) la série numérique associée admet $p \in \mathbb{N}$, nombre fixé, points de divergence sur son cercle de convergence.

(10) **(**)** Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières réelles suivantes :

$$1)\quad \sum_{n\geq 0} (3n+1) x^{3n},\quad 2)\quad \sum_{n\geq 0} \frac{\sin n}{n!} x^n,\quad 3)\quad \sum_{n\geq 0} (2^n+3^n) x^n,\quad 4)\quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!},$$

$$5)\ \sum_{n\geq 0} \sin n\, x^n,\quad 6)\ \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+2+\ldots+n},\quad 7)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\omega^{2n}}{(2n)!2^{2n-1}}x^{2n},$$

$$8)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}x^{2n}\quad 9)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}x^n.$$

(11) **(***)** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i = 1$. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *Indication :* introduire $A_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i$ et calculer $(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k$.

(12) **(***)** Après avoir montré qu'il existe, calculer le réel $\alpha = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n(n+1)(n-2)}$.

(13) **(**)** Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. On considère les séries $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\cos(na)}{(\sin a)^n}\frac{x^n}{n!}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\sin(na)}{(\sin a)^n}\frac{x^n}{n!}$ de somme respective $S(x)$ et $T(x)$.

(a) Montrer que les rayons de convergence de ces deux séries sont infinis. Calculer leurs sommes. (On calculera d'abord $S(x)+iT(x)$.)

(b) Montrer directement que T vérifie une équation différentielle du second ordre et retrouver ainsi l'expression de T.

(14) **(*/**)** Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence :

$\frac{1}{(1+x^2)(1-x)}$ au voisinage de 0 $\qquad$ $\frac{1}{x}$ au voisinage de 2

$\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ au voisinage de 0 $\qquad$ $e^{x(x-2)}$ au voisinage de 1

$\mathrm{Arctan}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ au voisinage de 0 $\qquad$ $\ln(1+x-2x^2)$ au voisinage de 0

$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ au voisinage de 0 $\qquad$ $\frac{e^{-x}}{1+x}$ au voisinage de 0

(15) **(**)** Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Développer f en série entière au voisinage de 0. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière et démontrer qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$. En déduire que $\int_0^1 \frac{1}{x}\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

(16) **(**)** On considère l'équation différentielle $4xy'' + 2y' + y = 0$, où y est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de la variable réelle x. On se propose de trouver une solution développable en série entière

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,\quad \text{vérifiant } y(0) = 1.$$

(a) calculer a_n en fonction de a_{n-1} pour $n \geq 1$. En déduire: $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ pour $n \geq 0$. Quel est le domaine de validité de la solution $y(x)$ ainsi obtenue?

(b) Montrer que

$$y(x) = \begin{cases} ch(\sqrt{-x}) & \text{pour } x \leq 0 \\ \cos(\sqrt{x}) & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}.$$

(17) **(**)** Déterminer les solutions développables en série entière autour de l'origine de l'équation différentielle $y'' - xy = 0$. Obtient-on ainsi toutes les solutions ?

(18) **(**)** Déterminer les solutions développables en série entière autour de l'origine de l'équation différentielle $2xy'' + 2y' + y = 0$.

(19) **(***)** On considère l'équation différentielle du second ordre
$$y'' + \omega^2 y = 3\omega^2 \cos^2\left(\frac{\omega x}{4}\right)$$
avec les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$. On suppose qu'il existe une solution de cette équation développable en série entière au voisinage de 0. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cette solution.

(a) Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3. Déterminer une relation de récurrence entre les coefficients a_n. En déduire l'expression de a_n.
(b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue et calculer sa somme.
(c) Retrouver ce résultat par une intégration directe de l'équation différentielle donnée.
(d) Déduire de ce qui précède la somme des séries numériques $\sum \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2}\right)$ et $\sum \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$.

(20) **(**)** Déterminer une équation différentielle du premier ordre admettant pour solution $f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. En déduire un développement en série entière de f à l'origine. Quel est le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (\arcsin x)^2$ à l'origine ?

(21) **(**)** Développer en série entière $f(x) = \sin(\alpha \arcsin x)$. *Indication :* déterminer une équation différentielle satisfaite par f.

(22) **(**)** Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

(23) **(***)** Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t^4}}$ est convergente, et que $I = 2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots.(2n)} \frac{2}{8n+1}$.

Feuille n^o 3:

Intégrales dépendant d'un paramètre

(1) **(*)** Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la limite ℓ de $(I_n)_n$. Trouver un équivalent en $+\infty$ de $J_n = I_n - \ell$.

(2) **(*)** Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{n+x}dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la limite ℓ de $(I_n)_n$.

(3) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\infty^\infty \frac{\sin^n x}{x^2}dx$.

(4) **(**)** Soit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^3}}dx$. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ et étudier la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5) **(**)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Après avoir montré son existence, calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_\infty^\infty e^{-nx^2} f(x)dx$.

(6) **(**)** Pour tout entier $n \geq 3$, on définit $f_n(x) = x(1+x)^{-n}$ pour $x \in [1,\infty[$. Montrer que les f_n sont intégrables sur $[1,\infty[$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction g à déterminer. En déduire que la série de terme général $u_n = \int_1^\infty f_n(x)dx$ converge, et calculer sa somme.

(7) **(*)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^1 e^{|x-t|}dt$.

(8) **(*)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}dt$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(9) **(**)** Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{\pi/2} t^x \ln(\tan t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,\infty[$.

(10) **(**)** Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt = 0$.

(11) **(***)** Soit $0 < \alpha < \beta$. Montrer que la fonction $f(t) = (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})t^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Après avoir posé $g : (x,t) = (e^{-xt} - e^{-t})t^{-1}$, montrer que g est continue sur $[1,\infty]\times]0,\infty[$ et vérifie le théorème de dérivation d'une intégrale paramétrée (intégration par rapport à t). En déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$ pour $x \geq 1$, puis en posant $x = \beta/\alpha$, déterminer $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$.

(12) **(**)** Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\ln(t)dt$. Quel est l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f? Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Sur quel ensemble la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire l'expression de f.

(13) **(***)** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-|x+u^2|}}{1+u^2}du$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Quel est son ensemble de dérivabilité? Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\int_0^\infty F(x)dx = 2\pi$.

(14) **(***)** Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \neq 1$, on pose $I(\rho) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)d\theta$. A l'aide de changements de variables, calculer $I(-\rho)$ et $I(1/\rho)$ en fonction de $I(\rho)$. Montrer que $I(\rho^2) = 2I(\rho)$ et en déduire pour tout $\rho \in]-1,1[$ que $I(\rho) = 0$, puis l'expression de $I(\rho)$ pour $|\rho| > 1$.

(15) **(***)** On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

(16) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(tx)dt$. Calculer f' et en déduire que f est solution d'une équation différentielle dont la résolution permet de donner l'expression exacte de f.

(17) **(***)** Soit a et b deux entiers non nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit le polynôme $P_n(x) = x^n(bx-a)^n/n$.
  (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en $x = 0$ et $x = a/b$.
  (b) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^\pi P_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  (c) On suppose que l'on peut écrire π sous la forme $\pi = a/b$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite non nulle à valeur dans $\mathbb{Z}$. En conclure que π est irrationnel.
  (d) Soit $r \in \mathbb{Q}$ un rationnel strictement positif. En considérant la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $J_n = \int_0^r P_n(t)e^t dt$, montrer que e^r n'est pas un rationnel.

(18) **(***)** Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x > 0$.
  (a) En utilisant le changement de variable $t = x+u\sqrt{x}$, montrer que $\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x,u)du$, où f est une fonction à préciser, nulle pour tout couple (x,u) tel que $u \le -\sqrt{x}$.
  (b) Déterminer la limite de f à u fixé quand $x \to \infty$.
  (c) Pour $x \ge 1$, montrer que pour tout $u \ge 0$, on a $0 < f(x,u) \le (1+u)e^{-u}$, puis que pour $u_i n] - \sqrt{x}, 0[$, $0 < f(x,u) \le e^{-u^2/2}$.
  (d) En déduire que $\Gamma(x+1) \sim (x/e)^x\sqrt{2\pi x}$ quand $x \to \infty$, puis retrouver le célèbre équivalent $n \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$ quand $n \to \infty$.

(19) **(***)** Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(1/t)dt$.

(20) **(***)** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\ln t}{t} dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$.

(21) **(***)** Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Feuille n^o 4:
Intégrales multiples

(1) **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}$ où $\Delta=\{(x,y)\in[0,\infty[^2,\ x+y\leq 1\}$.

(2) **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy$ où $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leq y\leq x\leq 1\}$.

(3) **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}dxdy$ où $\Delta=\{(x,y)\in[0,\infty[^2,\ x^2+y^2\leq a^2\}$ avec $a>0$ fixé.

(4) **(*)** A l'aide du changement de variable $x'=x/a$ et $y'=y/b$, calculer $\displaystyle\int\int_\Delta (x^2-y^2)dxdy$ où $\Delta=\{(x,y)\in[0,\infty[^2,\ x^2/a^2+y^2/b^2\leq 1\}$ avec $a,\,b>0$ fixés.

(5) **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int\int_\Delta xyz\,dxdydz$, puis $\displaystyle\int\int\int_\Delta (x+y+z+1)^{-2}dxdydz$, où $\Delta=\{(x,y,z)\in[0,\infty[^3,\ x+y+z\leq 1\}$.

(6) **(*)** Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos(x+y-z)\,dxdy$.

(7) **(**)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta x\,\cos(xy)\,\cos^2(rx)\,dxdy$ où $\Delta=\{(x,y)\in]0,1/2[\times]0,r[\}$ avec $r>0$ fixé.

(8) **(**)** Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha=\displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty (x+2y)^\alpha\,dxdy$ existe, auquel cas, calculer I_α. Même question pour $J_\alpha=\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x+2y)^\alpha\,dxdy$.

(9) **(***)** Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha=\displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\sin x}{x+y^\alpha}dxdy$ existe (l'intégrale est-elle alors semi-convergente?). Même question pour $J_\alpha=\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{\sin x}{x+y^\alpha}dxdy$.

(10) **(***)** Montrer que l'intégrale $I_\alpha=\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\Big(\frac{1}{(x+y)^2}\Big)dxdy$ existe. Est-elle absolument ou semi-convergente?

(11) **(**)** Calculer le volume de l'intersection entre la boule unité et un cylindre dont l'axe principal passe en 0 et le rayon est $0<r<1$.

(12) **(**)** Calculer le volume de l'ensemble $\Delta=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+z^2\leq a^2$ et $y^2+z^2\leq a^2\}$ avec $a>0$ (on pourra commencer par tracer Δ).

(13) **(**)** Montrer que la fonction $\phi\,:\,x\in\mathbb{R}\mapsto\int_x^\infty e^{-t^2}dt$ existe sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\int_0^\infty\phi(x)dx$.

(14) **(***)** Pour $(a,b)\in]1,\infty[^2$, calculer $\displaystyle\int \ln\big(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\big)dt$ (on pourra introduire une fonction à deux variables et utiliser le Théorème de Fubini).

(15) **(***)** Calculer le volume d'une boule de rayon est $r>0$ dans $\mathbb{R}^n$.

(16) **(***)** Soit $\Delta'=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ u\leq 1$ et $-u\leq v\leq u\}$.
  (a) Faire un tracé de Δ'.
  (b) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta'} u^2e^{uv}dudv$.

(c) Soit le changement de variable $\psi(u,v) = \big((u+v)/\sqrt{2},(u+v)/\sqrt{2}\big)$. Est-ce bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur Δ'? Quelle transformation géométrique représente ce changement de variable? Déterminer $\Delta = \psi(\Delta')$.

(d) Effectuer ce changement de variable pour en déduire la valeur de $\int\int_\Delta (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\,dxdy$.

(17) **(***)** Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.

(a) Tracer de Δ.

(b) A l'aide d'un changement de variable en polaire, calculer $\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

(18) **(***)** Soit A et B deux matrices carrées $(2,2)$ symétriques et définies positives. Montrer (en utilisant la diagonalisation de A) que $\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(u,v)A^t(u,v)}dudv = \frac{\pi}{\det A}$. En utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\det(A+B) \geq 4\sqrt{\det A\ \det B}$.