Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S.

Feuilles de TD du cours d'Algèbre S4

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMOS)

U.F.R. 27 et SAMOS (Centre d'Economie de la Sorbonne, équipe MATISSE)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Espaces euclidiens et préhilbertiens

(1) **(*)** Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ des matrices de taille (p,q) à coefficients réels. Montrer que pour toutes matrices $M=(m_{ij})_{1\le i\le p,\,1\le j\le q}$ et $M'=(m'_{ij})_{1\le i\le p,\,1\le j\le q}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, l'application $<M,M'>=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}m_{ij}m'_{ij}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Et l'application $<M,M'>_0=\sum_{i=1}^{\min(p,q)}m_{ii}m'_{ii}$?

(2) **(*)** Soit $\mathcal{C}^0([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. Montrer que l'application $f,\,g\in\mathcal{C}^0([0,1])\mapsto\sup_{x\in[0,1]}|f(x)g(x)|$ n'est pas un produit scalaire.

(3) **(**)** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; déterminer parmi les applications $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur E.
  (a) $E=\mathbb{R}^2$ et $\langle(x,y),(x',y')\rangle=xx'+2xy'+2yx'+5yy'$.
  (b) $E=\mathbb{R}^2$ et $\langle(x,y),(x',y')\rangle=xx'+2xy'+2yx'+yy'$.
  (c) $E=\mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{2}P(k)Q(k)$.
  (d) $E=\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $I=[a,b]$ ($a,b\in\mathbb{R}$ et $a<b$) à valeurs réelles, $\omega:I\mapsto\mathbb{R}_+^*$ une fonction continue fixée et pour $f,\,g\in E$, $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt$.

(4) **(*)** Soit f continue sur $]0,1]$, montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_0^1|f(t)|dt$ converge.

(5) **(**)** Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel constitué des matrice carrées de taille n à coefficients réels. Montrer que l'application $<M,N>:=\mathrm{Tr}({}^tM\,N)$ est un produit scalaire sur E. Déterminer $D_n(\mathbb{R})^\perp$ où $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales de E.

(6) **(**)** Après avoir introduira un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :
  (a) pour $x,x',y,y'\in\mathbb{R}^2$,
$$|xx'+2xy'+2yx'+5yy'|\le\sqrt{x^2+4xy+5y^2}\sqrt{(x')^2+4x'y'+5(y')^2}$$
  (b) Pour $f,g\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$,
$$\int_0^1 f(t)g(t)dt\le\left(\int_0^1 f(t)^2dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^1 g(t)^2dt\right)^{\frac12}.$$
  (c) Pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t^2}dt\le\left(\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)^2e^{-t^2}dt\right)^{\frac12}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)^2e^{-t^2}dt\right)^{\frac12}.$$
  (d) Pour $f\in\mathcal{C}^0([-1,1])$,
$$\int_{-1}^1\frac{|f(t)|}{\sqrt{1-t^2}}dt\le\sqrt{\pi}\left(\int_{-1}^1\frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt\right)^{\frac12}.$$

(7) **(***)** On travaille dans $E=\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_0^{+\infty}f(x)g(x)e^{-x}\mathrm{d}x$. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$ le n-ième polynôme de Laguerre: $\forall x\in\mathbb{R},\ L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n)$.
  (a) Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.
  (b) Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3.
  (c) Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.
  (d) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, Ln vérifie l'équation différentielle $xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0$.
  (e) Montrer que L vérifie l'équation $\forall n\in\mathbb{N},\,x\in\mathbb{R},\ (n+1)L_{n+1}(x)+(x-2n-1)L_n(x)+nL_{n-1}(x)=0$.

(8) **(**)** Soit P un projecteur ($P^2 = P$) d'un espace euclidien E. Montrer que P^* est un projecteur. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
(a) $P^* = P$,
(b) P est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} P$,
(c) P et P^* commutent ($P^*P = PP^*$).

(9) **(**)** Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^3$ de

$$f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x} dx.$$

Indication : On penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-2t}dt.$$

(10) **(**)** Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 \mathrm{d}x$.

(11) **(**)** Déterminer $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x\sin(t) + y\cos(t) - t)^2 \mathrm{d}t$.

(12) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(a) Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1, f_2 définies par $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x \qquad x \in [0,1]$.

(b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f : x \mapsto e^x$, $x \in [0,1]$.

(13) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$.
(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx.$$

(b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E. Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).
(c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(14) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$.
(a) Montrer que pour tout $P \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx$ est convergente.
(b) Pour P et Q dans E, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx.$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
(c) Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(15) **(***)** Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ un système de vecteurs unitaires tels que

$$\text{pour tout } x \in E \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée.

Feuille n^o 2:

Une application en analyse: les séries de Fourier

(1) **(*)** Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Montrer que si $f(x+\pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, les coefficients de Fourier d'indice pair sont nuls. Montrer que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = f(x)$, les coefficients b_{2n} et a_{2n-1} sont nuls pour $n \geq 1$.

(2) **(*)** Soit la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = \dfrac{x}{2}$ si $|x| < \pi$ et $f(\pi) = 0$.

(a) Déterminer la série de Fourier de f. Cette série de Fourier converge-t'elle vers f ? En quel sens ?

(b) En déduire les sommes des séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ puis $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

(c) Soit g la fonction 2π périodique définie par $g(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0, 2\pi[$ et $g(0) = 0$. Déduire la série de Fourier de g de la série de Fourier de f. Que peut-on dire de la convergence de cette nouvelle série ?

(3) **(*)** Soit f la fonction impaire, de période 2π, égale à $\pi/4$ sur $]0, \pi[$. Quelle est sa série de Fourier ? Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Quelle conclusion peut-on tirer de la comparaison avec l'exercie précédent ? Quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier ?

(4) **(*)** Soit f la fonction 2π périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]-\pi, 0]$ par $f(x) = 0$ et par $f(x) = x$ sur $]0, \pi]$. Développer f en série de Fourier. La fonction f coïncide-t'elle avec la somme de sa série de Fourier ? Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Peut-on calculer d'autres sommes de séries numériques ?

(5) **(**)** On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x \sin \dfrac{x}{2}$.

(a) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(b) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?

(c) En utilisant $S_f(\pi)$, déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}$.

(6) **(**)** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire f définie par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0, \pi]$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire.

Même question avec

(a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(0, \sin x)$.

(b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto |\sin x|$.

(c) f 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = \sqrt{2\pi}$ si $|x| < \frac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ si $|x| \geq \frac{1}{2}$.

(7) **(***)** Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

(8) **(***) Théorème de Bernstein**

(a) Soit f 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.

(b) On suppose de plus que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt \leq \int_0^{2\pi} [f'(t)]^2 dt.$$

En quel cas a-t-on égalité ?

(c) Soit f 2π-périodique continue. Soient $a_n(f)$ et $b_n(f)$ ses coefficients de Fourier. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\big(a_n(f)\sin nx - b_n(f)\cos nx\big)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et préciser sa somme en utilisant une intégrale de f.

(9) **(***) Produit de convolution**

Soient f et g deux fonctions réelles, 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

(a) Montrer que $f \star g$ est 2π-péridique, continue sur $\mathbb{R}$ et que $f \star g = g \star f$.

(b) Le produit de convolution $f \star g$ est-il un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques?

(c) On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, montrer que $f \star g$ est dérivable et que $(f \star g)' = f' \star g$.
En déduire que si f et g sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^2$, que $(f \star g)' = f' \star g = f \star g'$ et que $(f \star g)'' = f' \star g'$.

(d) Calculer les coefficients de Fourier de $f \star g$ en fonction des coefficents de Fourier de f et de g.

(e) Définissons f sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ et 0 sinon. Calculer $g = f \star f$ et calculer les coefficients de Fourier de g.

(10) **(***)** En utilisant une solution particulière sous forme de série trigonométrique, résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} + 5y^{(2)} + 4y = |\sin 2t|$.

Feuille n^o 3:

Formes linéaires et espace dual

(1) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. L'application $P \in E \mapsto P(1)$ est-elle une forme linéaire sur E?

(2) **(**)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit u et v deux formes linéaires sur E telles que $\ker u \neq \ker v$. Déterminer les dimensions de $\ker u + \ker v$ et de $\ker u \cap \ker v$.

(3) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on pose $f_i(x) = x_i + x_{i+1}$ pour $i = 1, \cdots, n-1$ et $f_n(x) = x_n + x_1$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de formes linéaires sur E. A quelle condition est-ce une base de l'espace dual E^*? Dans le case où c'est bien une base duale de cette base.

(4) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe $q \in E$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait

$$p(1) = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Calculer q dans le cas $n = 2$.

(5) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$, soit $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, on pose $P_k(X) = (X-a)^k$. Montrer que $e = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de E. Déterminer la base e^* duale de e et calculer les composantes sur e^* de la forme linéaire $\phi : P \mapsto \int_0^a P(t)dt$.

(6) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$, soit $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $i = 0, 1, \cdots, n$, on note $u_i : P \in E \mapsto P(b_i)$. Montrer que la famille $(u_0, u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E^* si et seulement si les b_i sont tous distincts.

(7) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. Montrer que l'ensemble des polynômes P de E tels que $\int_1^1 P(x)dx = 0$ est bien un s.e.v. de E. Donner une base de cet ensemble.

(8) **(**)** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel constitué des matrice carrées de taille n à coefficients réels. Montrer que $M \in E \mapsto \text{Tr}(M)$, trace de M, est une forme linéaire sur E. Soit maintenant ϕ une forme linéaire sur E vérifiant $\phi(AB) = \phi(BA)$ pour toutes matrices A, B de E. Montrer alors que ϕ est proportionnelle à l'application Tr.

(9) **(***)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$. L'application $u : f \in E \mapsto f(1/2)$ est-elle une forme linéaire sur E? Sur E on associe le produit scalaire $< f, g >:= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Peut-on trouver $g_0 \in E$ telle que $u(f) =< f, g_0 >$ pour tout $f \in E$? Si on considère maintenant le s.e.v. $F_n = \mathbb{R}^n[X]$ de E et le même produit scalaire avec $g \in F_n$, est-ce possible cette fois?

Feuille n^o 4:

Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales

(1) **(**)** Soit E un espace euclidien et $\langle .,. \rangle$ son produit scalaire. Soit f une application linéaire $E \mapsto E$. Pour F un sous espace vectoriel de E, on note $F^\perp = \{x \in E \; : \; \forall y \in F, \; \langle x, y\rangle = 0\}$ (l'ensemble des éléments orthogonaux à F).
  (a) Soit $x \in E$ tel que pour tout $y \in E$, $\langle x, y\rangle = 0$. Montrer que $x = 0$ (*i.e.* $E^\perp = \{0\}$).
  (b) En déduire qu'on peut bien définir une application $f^* : E \mapsto E$ telle que pour tout $x, y \in E$, $\langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
  (c) Montrer que f^* ainsi définie est linéaire.
  (d) Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
  (e) Montrer que $F^\perp \cap F = \{0\}$ et que $E = F \oplus F^\perp$. En déduire que $(F^\perp)^\perp = F$.
  (f) Montrer que $\ker f = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et que $\operatorname{Im} f = (\ker f)^\perp$.
  (g) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et M la base de f dans $(e_1, \dots, e_n)$. Donner la matrice de f^* en fonction de M.

(2) **(**)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $< x, f(x) >= 0$. Montrer que $f^* = -f$, puis que $E = \ker f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} f$.

(3) **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq 1$. On pose $u = Id - f$. Montrer que $E = \ker(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(f - Id)$, puis que $(\operatorname{Im} u)^\perp = \ker u = \ker(u^*)$.

(4) **(**)** On considère l'espace vectoriel R^3 muni du produit scalaire canonique, et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
  (a) Préciser une base orthonormale de F.
  (b) Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.
  (c) Donner l'expression de p_F, la projection orthogonale sur F. Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment.
  (d) Pour $x \in \mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(x; F)$.
  (e) Ecrire la matrice (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F. Quelle est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$?
  (f) Ecrire la matrice (relativement à la base canonique) de la rotation d'angle $\pi/3$ et d'axe $F^\perp$.

(5) **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
  (a) f est une symétrie orthogonale.
  (b) f est symétrique ($f^* = f$ c'est à dire pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$).
  (c) f est une transformation orthogonale *i.e.* préserve le produit scalaire : $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(6) **(**)** Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \right| \leq n.$$

Indication : Utiliser le vecteur $u = (1, 1, \dots, 1)$.

(7) **(**)** Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien et soit $f : E \to E$ une application telle que $f(0) = 0$ et $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $x, y \in E$. Montrer que $< f(x), f(y) >=< x, y >$ pour tout $x, y \in E$. En déduire que f est une application linéaire orthogonale.

(8) **(***)** Soit E un espace euclidien et $u : E \mapsto E$ telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. En déduire que u est linéaire (donc orthogonale). Soit

$f : E \mapsto E$ telle que pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que $f = t \circ u$ où t est une translation et u est orthogonale.

(9) **(*)** Soit les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

Pour chacune de ces matrices,

(a) Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres orthonormaux associés.
(b) Calculer la puissance n-ème de la matrice.

(10) **(*)** Montrer que si A et B sont des matrices symétriques de taille $n \geq 2$, $A\,B$ n'est pas forcément une matrice symétrique.

(11) **(***)** Résoudre l'équation ${}^tM = M^2 - I_n$ pour M une matrice carrée de taille n.

(12) **(**)** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, étudier les endomorphismes représentés dans une base orthonormée par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(13) **(**)** Soient a, b, c trois réels. On pose

$$M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} & -\frac{1}{2} & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que M représente une symétrie orthogonale dans une base orthonormée sur $\mathbb{R}^3$.

(14) **(**)** Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du vecteur $u = (1, 1, 1)$.

(15) **(**)** Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y - z = 0$.

(16) **(***)** Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = X \cdot {}^tX$.

(a) Déterminer le rang de la matrice M (on pourra chercher le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M).
(b) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
(c) Calculer M^n.

(17) **(**)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer qu'alors $A = 0$.

Feuille n^o 5 :

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

(1) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien. Montrer que l'application $\psi(x,y) = <x,y>$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. Montrer que la forme quadratique associée à ψ est définie positive.

(2) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E. Montrer que l'application $\Phi(x) = <x, u(x)>$ pour tout $x \in E$ est une forme quadratique sur E. Déterminer l'endomorphisme associé à Φ.

(3) **(**)** Soit $<.,.>$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, $<x, y> = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$. A partir de la base orthonormale classique $e = (i, j)$ de $\mathbb{R}^2$, déterminer une base $e' = (e'_1, e'_2)$ orthonormale pour ce produit scalaire. Déterminer les coordonnées dans e' d'un vecteur quelconque x ayant pour coordonnées (x_1, x_2) dans e.

(4) **(*)** Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes :
- (a) $\Phi_1(x,y) = x^2 - xy + y^2$;
- (b) $\Phi_2(x,y) = x^2 + xy - y^2$;
- (c) $\Phi_3(x,y) = 3(x+y)^2 - 4(x-y)^2 - 13xy$;
- (d) $\Phi_4(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zy$;
- (e) $\Phi_4(x,y,z,t) = 2xy + 2z \cdot t2yz - 2xt$.

(5) **(**)** On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique
$$q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1.$$
- (a) Montrer que q est définie positive.
- (b) Déterminer une base orthonormale pour q, d'abord par la méthode de Gauss (base notée $\mathcal{B}'$), puis par le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt.
- (c) Quelle est la matrice P de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

(6) **(**)** Suivant la valeur de λ, étudier la signature de la forme quadratique suivante:
$$\Phi(x,y) = (1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)x\,y \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(7) **(*)** Démontrer que la forme quadratique $\Phi(x,y,z) = x^2 + (z-y)^2$ est positive. Est-elle définie positive ? Résoudre $\Phi(x,y,z) = 0$.

(8) **(***)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et les deux formes quadratiques $\Phi_1(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$, $\Phi_2(x,y) = -x^2 + 2xy$ pour tout $(x,y) \in E$. Déterminer les signatures de Φ_1 et Φ_2. Trouver une base orthonormale pour Φ_1. Décomposer Φ_2 dans cette base. Expliquer pourquoi il est possible de trouver une même base orthonormale pour Φ_1 et Φ_2, et la déterminer.

(9) **(***)** Déterminer la signature de la forme quadratique $\Phi(x) = \sum_{i,j=1}^n i x_i x_j$ pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(10) **(**)** Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation
$$5x^2 + 3y^2 - 4xz = 0.$$

(11) **(**)** Déterminer les coniques suivantes:
- (a) $x^2 + 2xy + 2y^2 = 5$.
- (b) $3x^2 - 6xy + 2y^2 = 4$.
- (c) $x^2 + 4xy + y^2 + 2x = 10$.
- (d) $xy + yz = 1$.