Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

MAGISTÈRE FINANCE UFR06, 2009-2010

TD du cours de Statistique S1

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

U.F.R. 27, Equipe SAMM
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Tribus, mesure de probabilités et indépendance

1. **(*)** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace mesurable avec Ω un ensemble fini. On définit μ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mu(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$. Montrer que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ est un espace probabilisé.

2. **(*)** On constate qu'en France il y une personne sur 2 qui possède un ordinateur personnel et une personne sur 25 qui est chauve. On constate aussi que une personne sur 75 est chauve et possède un ordinateur personnel. Quel est le pourcentage de Français chevelus? De Français chauves sans ordinateur? De Français chevelus et sans ordinateur?

3. **(**)** On demande à 5 personnes d'écrire leur nom sur un papier, puis on mélange les papiers et on les redistribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne ait le papier avec son nom? Que tous aient le papier avec leur nom?

4. **(*)** On considère une population composée de 48% d'hommes et de 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est de 0.05, qu'une femme soit daltonienne 0.0025. Quelle proportion de la popultation est daltonienne?

5. **(*)** Trouver la probabilité pour que dans une famille de quatre enfants on ait: (a) au moins un garçon, (b) au moins un garçon et une fille. On suppose que la probabilité de la naissance d'un garçon est de 0.51.

6. **(*)** On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que ce soit une dame (décrire l'ensemble fondamental, la tribu associée et la probabilité considérée)? On en choisit deux. Quelle est la probabilité que ce soit deux dames (décrire l'ensemble fondamental, la tribu associée et la probabilité considérée) ?

7. **(*)** On a lancé 10 fois une pièce non biaisée et l'on a obtenu 10 fois pile. Quelle était la probabilité d'un tel tirage? On lance une onzième fois la pièce. Quelle est la probabilité d'avoir pile sachant que les dix lancés précédents étaient des piles? Quelle est la probabilité que le onzième lancé soit pile?

8. **(*)** On effectue le dépistage systématique sur une population donnée d'une maladie qui affecte en général 15% des individus. On réalise un test qui donne 95% de résultats positifs pour les personnes malades et 10% de résultats positifs parmi les non malades. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard soit malade sachant que le test a donné un résultat positif? soit non malade sachant que le test a donné un résultat négatif?

9. **(**)** Deux joueurs d'échecs effectuent un match en trois parties. Lorsque ces deux joueurs se rencontrent on sait en général que A gagne une fois sur 4, que B gagne une fois sur 3 et que le reste du temps il y a nul. Sachant que l'on sait après le tournoi que c'est le même joueur qui a gagné les trois parties, quelle est la probabilité que ce soit A?

10. **(**)** On estime que le gérant d'un portefeuille boursier bien informé a, pour une action donnée achetée, une probabilité égale à 4/5 de voir l'action monter. On estime aussi qu'un gérant mal informé a une probabilité égale à 1/2 de voir l'action baisser. On estime aussi que 30% des gérants de portefeuilles boursiers sont bien informés, les autres ne l'étant pas. Un gérant donné achète 5 actions indépendantes les unes des autres. 3 montent et 2 baissent. Quelle est la probabilité qu'il soit bien informé?

Feuille n^o 2:

Variables aléatoires discrètes et continues

1. **(*)** On considère 4 lettres et les 4 enveloppes correspondantes. On met au hasard les 4 lettres dans les enveloppes et on définit la variable aléatoire X comme le nombre de lettres qui atteindront leur destinataire. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

2. **(*)** On considère 8 hommes et 8 femmes, dont on extrait par tirage au sort un groupe de 8 personnes. On note N la variable aléatoire égale au nombre de femmes du groupe. Calculer la probabilité $P(3 \leq N \leq 5)$. Donner la loi de probabilité de N, son espérance et sa variance.

3. **(**)** On suppose la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = a\frac{1}{n^2}.$$
Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Quelle est l'espérance de X?

4. **(***)** On suppose que le nombre de connections par jour sur un serveur internet est N, variable aléatoire, telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = a\frac{\lambda^{2n+1}}{2n+1},$$
avec $\lambda \in]0, 1[$. Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité (utiliser les séries entières). Calculer $P(0 \leq N \leq 2)$ et la probabilité qu'il y ait eu plus d'une connection dans la journée. Calculer l'espérance et la variance de N.

5. **(*)** Un bureau de poste contient n guichets. On note N_i le nombre de clients au guichet i et N le nombre total de clients dans le bureau. On suppose que chaque guichet fonctionne indépendamment des autres et que chaque N_i suit une loi de Poisson de moyenne 3.
   (a) On suppose que $n = 2$. Donner la loi de N.
   (b) On suppose que n est un entier quelconque. Donner la loi de N. Déterminer $P(N_i = l/N = m)$.

6. **(**)** On suppose que le temps d'attente (en mn) à une station service est une variable aléatoire T telle que
$$\forall t \geq 0, \quad P(T > t) = a(t^2 + 1)\exp(-2t).$$
Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Calculer $P(1 \leq T \leq 2)$ et la probabilité de mettre moins de 3 mn pour être servi. Déterminer la densité de probabilité de T, et calculer son espérance et sa variance.

7. **(**) Paradoxe de Saint-Petersbourg** Je vous propose le jeu suivant: je vous donne 10000 euros, puis vous lancez une pièce équilibrée; si le résultat est Pile, vous me donnez 2 euros et la partie s'arrête. Si le résultat est Face, vous lancez à nouveau la pièce; si le résultat est Pile, vous me donnez 4 euros et la partie s'arrête. Si le résultat est Face, vous lancez à nouveau la pièce; si le résultat est Pile, vous me donnez 8 euros et la partie s'arrête. Par itération, si au n-ième lancer le résultat est Pile, vous me donnez 2^n euros et la partie s'arrête; sinon, vous lancez à nouveau... Calculer l'espérance de mon gain, puis celle du votre. N'auriez-vous pas pourtant envie de jouer à ce jeu?

8. **(*)** On suppose qu'avec une balance, l'erreur sur la pesée d'un corps est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0; (0.08)^2)$. Soit X la variable aléatoire égale au résultat de la pesée d'un corps de masse exacte 72.37 g. Calculer la probabilité $P(72.3 \leq X < 72.5)$. Déterminer un intervalle I tel que $P(X \in I) = 0.98$.

9. **(*)** On considère une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Calculer la médiane m de la loi, c'est-à-dire le nombre m tel que $P(X \leq m) = 0.5$.

10. **(**)** L'éclairage d'une pièce se compose de deux néons montés en série (ce qui signifie que chaque ampoule ne fonctionne que lorsque les deux fonctionnent). La durée de vie de chaque néon suit une loi de exponentielle de moyenne un an. On note T la durée de vie du système d'éclairage. Donner la loi de T, son espérance et sa variance.

11. **(*)** On suppose la variable aléatoire X à valeurs dans $[1, +\infty[$, telle que
$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = a\frac{1}{x}^3.$$
Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Calculer l'espérance et la variance de X.

12. **(**)** On suppose que le temps d'attente (en mn) à une station service est une variable aléatoire T telle que
$$\forall t \geq 0, \quad P(T > t) = a(t^2 + 1)\exp(-2t).$$
Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Calculer $P(1 \leq T \leq 2)$ et la probabilité de mettre moins de 3 mn pour être servi. Déterminer la densité de probabilité de T, et calculer son espérance et sa variance.

13. **(**)** On suppose 1000 piles produites par une même usine, telles que chaque pile a, indépendamment des autres, une probabilité 0.04 d'être défectueuse. On note N le nombre de piles défectueuses parmi les 1000.
    (a) Déterminer la loi de N, calculer son espérance m et sa variance σ^2, puis les probabilités $P(N < 5)$ et $P(N > 100)$.
    (b) On modélise autrement N par une loi de Poisson de même espérance que précedemment (donc m). Calculer alors la variance de N puis les deux probabilités précédentes.
    (c) On modélise enfin N par une loi normale de moyenne m et de variance σ^2. Calculer alors les deux probabilités $P(N < 5)$ et $P(N > 100)$.

Feuille n^o 3 :

Vecteurs aléatoires et suites de variables aléatoires

1. **(*)** On jette un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire représentant le double du nombre obtenu et Y la variable aléatoire prenant les valeurs 1 ou 4 suivant que le nombre obtenu soit impair ou pair. Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance des variables aléatoires X, Y, $X+Y$ et $X \cdot Y$.

2. **(**)** Soit X une v.a. réelle normale centrée réduite et soit Y une v.a. indépendante de X, à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $P(Y=1)=0.5$. On considère la v.a. $Z = X \cdot Y$. Déterminer la mesure de probabilité de Z, puis celle de $X+Z$. En déduire que la somme de 2 variables gaussiennes peut ne pas être gaussienne.

3. **(**)** Soit X et Y deux v.a. indépendantes définies sur le même espace de probabilité (Ω, P), X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, et Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On pose pour tout $\omega \in \Omega$,

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(\omega) = 0 \\ Y(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) = 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega \quad Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de Z.

4. **(*)** Soit X et Y deux variables définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (de densité f_X et f_Y). Déterminer la densité de $X+Y$ lorsque X et Y sont indépendantes. La calculer explicitement dans les cas où X et Y sont des v.a. uniformes sur [0,1], puis des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.

5. **(**)** Soit X et Y deux variables aléatoires telles que le vecteur $Z = (X,Y)$ soit absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, de densité f_Z telle que :

$$f_Z(x,y) = k \cdot \frac{|x|}{(x^2+|y|+1)^4} \quad \text{pour} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Déterminer la valeur de k. Déterminer la loi de X et celle de Y. Déterminer leurs espérances, leurs variances et $\mathrm{cov}(X,Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

6. **(**)** Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. gaussiennes centrées réduites. Soit $a \in]-1,1[$. On considère la suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

   (a) $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = a \cdot X_n + \varepsilon_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X_n, puis celle de $(X_1, \cdots, X_n)$. Les variables X_i sont-elles indépendantes ?

   (b) $X_0 \sim \mathcal{N}(0, (1-a^2)^{-1})$ et $X_{n+1} = a \cdot X_n + \varepsilon_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X_n, puis celle de $(X_1, \cdots, X_n)$. Les variables (X_i) sont-elles indépendantes ?

   (c) $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X_n, puis celle de $(X_1, \cdots, X_n)$. Les variables (X_i) sont-elles indépendantes ?

7. **(***)** On considère $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que X est absolument continue, c'est-à-dire que la mesure de probabilité de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer alors que la loi de X_1 admet une densité f_1 par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1 sur $\mathbb{R}$, que l'on exprimera en fonction de f.

(b) Calculer f_1 et f_2 pour f telle que :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_1} & \text{si } x_1 \geq x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A-t-on $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ pour λ_2-presque tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$? Quelle conclusion en tirer sur X_1 et X_2?

(c) On suppose maintenant que $X = (X_1, X_1)$ où X_1 est absolument continue par rapport à λ_1. Le vecteur aléatoire X est-il absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$?

8. **(**)** Soit $(X)_n$ une suite des v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \cdot X_{n+1}$.

   (a) Donner la loi de Y_n. Calculer $E(Y_n)$ et $\text{Var}(Y_n)$.

   (b) Calculer $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ et $\text{Cov}(Y_n, Y_m)$ pour $m \neq n + 1$.

   (c) Pour $n \geq 1$, soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Calculer $E(S_n)$ et $\text{Var}(S_n)$.

9. **(**)** Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4, et l'on effectue deux tirages successifs sans remise. On note N_1 (resp. N_2) la variable aléatoire donnée par le numéro de la boule tirée au premier (resp. deuxième) tirage.

   (a) Donner la loi de probabilité du couple (N_1, N_2) (utiliser un tableau). Déterminer les lois de probabilité de N_1 et de N_2, puis $E(N_1)$, $E(N_2)$ et $V(N_1)$, $V(N_2)$, puis $cov(N_1, N_2)$. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes?

   (b) Soit $X = N_1 + N_2$. Donner la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $P(X \geq 5)$.

   (c) On recommence n fois ce double tirage. On note X_i la somme des numéros des deux boules tirées au i-ème tirage. Expliquer pourquoi $(X_1, X_2, ..., X_n)$ forme un n-échantillon. On note $M_n = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$. Déterminer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

10. **(**)** La durée de vie d'un composant électrique peut être représentée par une variable aléatoire réelle X de densité de probabilité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} kx(5 - x) & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Calculer la valeur de k. Représenter graphiquement la fonction de répartition F_X de X.

   (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Déterminer la médiane de X, c'est-à-dire le réel m tel que $P(X \leq m) = 0.5$.

   (c) On considère n composants électriques dont les durées de vie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ forment un n-échantillon de densité f. On forme un système électrique en branchant ces n composants en parallèle. Déterminer la fonction de répartition F_T de la durée de vie T_n de ce système (celui-ci ne fonctionne plus lorsque tous ses n composants sont grillés).

11. **(**)** Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de loi exponentielle de paramètre 1.

   (a) Montrer que $P(\exists (i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2, i \neq j, X_i = X_j) = 0$.

   (b) On pose $Z = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Déterminer la loi de Z.

   (c) Soit $N = \min\{1 \leq i \leq n, X_i = Z\}$. Montrer que N est une v.a. et établir que $P(N = K, Z > t) = \dfrac{e^{-nt}}{n}$ pour $k = 1, \cdots, n$ et $t > 0$. En déduire que Z et N sont des v. a. indépendantes et préciser la loi de N.