Partiel d'analyse S4, juin 2006

Exercice 1.
1.
1.a. Rappeler (sans justifier) les développements en série entière des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{1+x},$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x},$$

et donner le rayon de convergence des séries. On admettra que les fonctions sont somme de la serie sur le disque ouvert de convergence.
1.b. Donner l'ensemble des réels x pour lesquels la seconde série est convergente.
1.c. Montrer que :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n},$$

(on pourra, par exemple, utiliser la question **1.a**).
2. Par exemple en utilisant la question **1.a**, ou par toute autre méthode, démontrer que :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)x^p.$$

3. On introduit la fonction f définie sur $]-1;1[$ par l'expression :

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^2}.$$

3.a. On introduit les nombres α_n, pour $n \in \mathbb{N}$, définis de la manière suivante. α_n est le nombre de couples $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $p+2q = n$. Ainsi, $\alpha_5 = 3$ puisque on peut choisir trois couples (p,q) tels que $p+2q = 5$, qui sont $(5,0)$, $(3,1)$ et $(1,2)$. En formant le produit des deux séries entières, montrer que :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n.$$

3.b. Démontrer que pour tout $x \in]-1;1[$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}\right].$$

En déduire, à l'aide des questions **1** et **2**, une autre expression du développement en série entière de f.
3.c. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}.$$

4. De combien de manières peut-on faire un total de 10000 euros avec des pièces de 1 euro et de 2 euros ? (Justifier).

Exercice 2. On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + y(x) = e^x.$$

1. On cherche les solutions développables en série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
1.a. Déterminer une relation de récurrence entre les coefficients a_n et a_{n+2}.
1.b. Démontrer qu'il existe une solution et une seule f_1 développable en série entière telle que $f_1(0) = 1$ et $f_1'(0) = 0$ (on ne demande pas le calcul explicite des coefficients).
2.
2.a. Résoudre l'équation différentielle par les moyens habituels (dans la mesure du possible, plutôt que d'appliquer la longue MVC, on cherchera une solution particulière). On exprimera les constantes en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.
2.b. En déduire l'expression de la fonction f_1, puis son développement en série entière.
2.c. Vérifier que les coefficients du développement de f_1 satisfont la relation qui avait été obtenue en **1.a.** (on distinguera n pair et n impair).

Exercice 3. Soit $(A_n)_n$ une suite d'ensembles inclus dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. On pose :

$$A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

$f_n = 1_{A_n}$ et $f = 1_A$.
1. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ fixé. Montrer que la suite $(1_{A_n}(x))_n$ est croissante. En déduire qu'elle converge vers un élément de $\{0; 1\}$.
2. Déduire de la question précédente qu'il existe $C \in \mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall x \in C, \quad 1_C(x) = \lim_{n\to+\infty} 1_{A_n}(x).$$

Comparer (en justifiant) C et A.