Partiel d'analyse S4, juin 2007, Durée : 3h

Les documents et calculatrices sont interdits. Lorsqu'une question exige un raisonnement, la précision de celui-ci aura une part importante dans l'évaluation.

Exercice 1. Dans tout cet exercice, on considère l'équation différentielle linéaire (E) suivante :

$$y''(x) - y(x) = e^{\alpha x},$$

où α est un paramètre réel. On note (H) l'équation homogène associée.
1.
1.a. Rappeler les développements en série entière des fonctions suivantes :

$$x \mapsto e^x,$$

$$x \mapsto e^{-x},$$

et donner le rayon de convergence des séries. On rappelle que les fonctions sont somme de la série sur le disque ouvert de convergence.
1.b. On définit les fonctions ch et sh par les sommes des séries suivantes :

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!},$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Vérifier que les séries ont un rayon de convergence infini.
1.c. Exprimer ch' à l'aide de sh et sh' à l'aide de ch. En déduire que ch et sh sont deux solutions de l'équation (H). Rappeler l'expression de la solution générale de l'équation (H).
1.d. Calculer $\mathrm{ch}(0)$ et $\mathrm{sh}(0)$. A l'aide de **1.c** en déduire les relations (que l'on aurait pu vérifier directement par les séries) :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Vérifier alors que la solution générale de (H) peut s'écrire :

$$A\mathrm{ch} + B\mathrm{sh}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Résoudre l'équation (E) par les moyens habituels (il est déconseillé d'appliquer la MVC). On distinguera selon que $|\alpha|$ est différent ou égal à 1, et dans le second cas, on cherchera une solution particulière de la forme $x \mapsto cxe^{\alpha x}$. Ecrire les développements en série entière des solutions obtenues.

3. On veut résoudre (E) à l'aide des séries entières. On cherche une solution de (E) sous la forme d'une série entière $\sum_n a_n x^n$.
3.a. Trouver une relation entre les coefficients $(a_n)_n$.
3.b. Vérifier que les coefficients des solutions obtenues dans la question **2** satisfont ces relations.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donnée. On considère l'équation différentielle :

$$(E_f) \qquad \begin{cases} y'(x) - y(x) = f(x) \\ y(0) = a \end{cases}$$

où a est donné.
1. Résoudre cette équation différentielle.
2. On note y_f la solution qui satisfait $y_f(0) = 1$ et y_0 la fonction y_f lorsque $f = 0$. Donner les expressions de y_f (en fonction de f) et de y_0.
3. On pose $z = y_f - y_0$. Montrer que z est solution d'un problème de Cauchy que l'on explicitera. En déduire la valeur d'une constante c telle que :

$$\forall x \in [0;1], \quad |y_f(x) - y_0(x)| \leq c \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$$

(on cherchera, dans la mesure du possible, à donner une constante aussi petite que possible, mais valable pour toute fonction f).

Exercice 3. On considère le pavé $P = [0;1]^2$ du plan. Pour s'aider, il est conseillé de dessiner les situations pour des petites valeurs de N (par exemple comprises entre 2 et 4 ou 5).
1. Soit N un entier au moins égal à 2. On considère, pour $j \in \{0, \dots, N-1\}$, les pavés :

$$Q_{N,j} = \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right]^2,$$

et l'on pose

$$Q_N = \bigcup_{j=0}^{N-1} Q_{N,j}.$$

1.a. Montrer que Q_N est Jordan mesurable.
1.b. Déterminer $\mu(Q_{N,j})$, et en déduire que :

$$\mu(Q_N) \leq \frac{1}{N}$$

(en fait il y a égalité mais ce n'est pas demandé de le prouver).
1.c. Soit D_1 le segment de droite :

$$D_1 = \{(x, x), \quad x \in [0;1]\}.$$

Démontrer que D_1 est Jordan mesurable, puis déduire de **1.b.** que $\mu(D_1) = 0$ (on pourra justifier que pour tout N, $D_1 \subset Q_N$).

2. Soit $a \in]0;1[$. En s'inspirant de **1**, montrer que la partie :

$$D_a = \{(x, ax), \quad x \in [0;1]\}$$

de P vérifie $\mu(D_a) = 0$ (il n'est pas demandé de démontrer que D_a est Jordan-mesurable).

3. (question plus difficile). Soit la courbe $C = \{(x, x^2), \quad x \in [0;1]\}$. On admet que C est Jordan mesurable. Justifier que $\mu(C) = 0$.