Licence MASS Seconde Année. **Université de Paris 1.**
U.F.R. 27 **2007-2008**

Partiel d'analyse S4, juin 2008, Durée : 3h

L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Cet énoncé comporte 3 pages de texte.

Lorsqu'une question exige un raisonnement, la précision de celui-ci aura une part importante dans l'évaluation.

Exercice 1. (10 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de l'équation différentielle suivante:

$$E_\lambda : \qquad xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0.$$

où la fonction y est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable de la variable x et λ un réel donné.

1. Il est admis qu'il existe une fonction f_λ, somme d'une série entière de rayon de convergence R, strictement positif, prenant la valeur 1 en 0, ($f_\lambda(0) = 1$), solution dans l'intervalle $]-R, R[$ de l'équation différentielle E_λ. Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

   (a) Montrer que la suite $(a_n)_n$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} a_n, \quad \forall n \geq 0.$$

   (b) Déterminer les coefficients $a_n, n \geq 1$, en fonction de l'entier n et du réel λ. Préciser les fonctions f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}.

   (c) Pour quelles valeurs du réel λ la fonction f_λ est-elle un polynôme ? Préciser son degré en fonction de la valeur $-p$ donnée au réel λ. Préciser le coefficient du terme de plus haut degré (le terme dominant).

   (d) Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n x^n$, $n \geq 1$, lorsque le réel λ est différent des valeurs obtenues précédemment ?

   Il est admis, dans la suite, que la fonction f_λ est la seule fonction, développable en série entière sur toute la droite réelle, qui soit solution de l'équation différentielle E_λ et qui prenne la valeur 1 en 0.

2. Dans cette question le réel λ est égal à 1 :

$$E_1 : \qquad xy'' + (1-x)y' - y = 0.$$

   (a) Vérifier que la fonction h définie par $h(x) = e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ est solution de E_1 sur $]0, +\infty[$. Vérifier que h est indépendante de f_1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]0, +\infty[$.

   (b) Déterminer de même la solution générale de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]-\infty, 0[$.

(c) Déterminer enfin les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle E_1.

3. Etant donné un réel λ, soit g_λ la fonction définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$ par la relation :

$$g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

   (a) Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par la fonction g_λ.

   (b) En déduire, en admettant que le produit de deux fonctions réelles développables en série entière sur la droite réelle $\mathbb{R}$ est encore une fonction développables en série entière sur la droite réelle $\mathbb{R}$, que, pour tous réels λ et x :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

   (c) Préciser, lorsque p est un entier strictement positif, les fonctions f_p. En déduire les fonctions f_2 et f_3.

   (d) Soit p un entier donné supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$). Quelle est, lorsque le réel x croît indéfiniment, la limite de l'expression ci-dessous :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)}?$$

Exercice 2. (7 points)

Pour a un réel donné, on désigne par E_a l'ensemble des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et telles que pour tout réel $s > a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)| \, dt$ existe. Si $f \in E_a$, on pose pour $s > a$, $(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f : t \mapsto t^n \in E_0$. Déterminer, en admettant que pour tout entier naturel n, $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = n!$, la fonction $\mathcal{L}f$.

2. Soit P un polynôme.

   (a) Montrer que $\forall s > 0$, $(\mathcal{L}P)(s) = Q(\frac{1}{s})$, où Q est un polynôme qu'on précisera.

   (b) En déduire que si $\mathcal{L}P = 0$ alors $P = 0$.

3. (a) Montrer que si f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ telle que $f \in E_a$ et $f' \in E_a$ alors

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0), \quad \forall s \in]a, +\infty[.$$

   (b) On suppose que f est de classe C^n sur $[0, +\infty[$ et que $f^{(k)} \in E_a$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Généraliser la relation précédente à $\mathcal{L}f^{(n)}$.

4. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$; on suppose que pour tout $s > a$, la fonction $t \mapsto e^{-st} f(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

   (a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{-st} |f(t)| \leq M e^{-(s-u)t}, \quad s, u > a \text{ et } t \geq 0.$$

   (b) En déduire que $f \in E_a$.

5. Soit $f \in E_a$.

   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^k f(t) \in E_a$.

   (b) Montrer que $\mathcal{L}f$ est C^∞ sur $]a, +\infty[$ et exprimer $(\mathcal{L}f)^{(k)}$ à l'aide d'une intégrale.

Exercice 3. (3 points)

Pour tout réel $R > 0$, on considère les ensembles

$$C_R = [-R, R] \times [-R, R] \qquad \text{et} \qquad B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

1. Calculer les intégrales doubles

$$I_R = \int\int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \qquad \text{et} \qquad J_R = \int\int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

2. Montrer que

$$B_R \subset C_R \subset B_{\sqrt{2}R}.$$

3. En déduire que

$$\lim_{R \to +\infty} I_R = \lim_{R \to +\infty} J_R.$$

4. Retrouver la valeur de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$