Partiel d'analyse S4, septembre 2007, Durée : 3h

Les documents et calculatrices sont interdits. Lorsqu'une question exige un raisonnement, la précision de celui-ci aura une part importante dans l'évaluation.

Exercice 1. On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions :

$$u(x) = e^{3x}, \qquad v(x) = e^{5x}.$$

1. Trouver une équation linéaire (E) du second ordre à coefficients constants et sans second membre dont sont solutions les fonctions u et v.
2. Trouver, en fonction de u, v, y_0 et y_1 l'expression de la solution de (E) satisfaisant $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$.
3. Chercher les solutions développables en série entière de (E). Retrouver la formule obtenue dans la question précédente.
4. Reprendre la question **1** en remplaçant les fonctions u et v par les fonctions :

$$x \mapsto e^x \sin(2x), \qquad x \mapsto e^x \cos(2x).$$

Exercice 2. Donner dans chacun des cas demandés l'expression d'une série entière dont l'ensemble de convergence soit :

- $\{0\}$,
- $\{z \in \mathcal{C}, |z| \leq 2\}$,
- $\{z \in \mathcal{C}, |z| < 2\}$,
- $\{z \in \mathcal{C}, |z| \leq 2\} \setminus \{2\}$.

Exercice 3. On considère le pavé $P = [0;1]^2$ du plan. Pour s'aider, il est conseillé de dessiner les situations pour des petites valeurs de N (par exemple comprises entre 2 et 4 ou 5).
1. Soit N un entier au moins égal à 2. On considère, pour $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, les pavés :

$$Q_{N,j} = \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right]^2,$$

et l'on pose

$$Q_N = \bigcup_{j=0}^{N-1} Q_{N,j}.$$

1.a. Montrer que Q_N est Jordan mesurable.
1.b. Déterminer $\mu(Q_{N,j})$, et en déduire que :

$$\mu(Q_N) \leq \frac{1}{N}$$

(en fait il y a égalité mais ce n'est pas demandé de le prouver).
1.c. Soit D_1 le segment de droite :

$$D_1 = \{(x,x), \quad x \in [0;1]\}.$$

Démontrer que D_1 est Jordan mesurable, puis déduire de **1.b.** que $\mu(D_1) = 0$ (on pourra justifier que pour tout N, $D_1 \subset Q_N$).

2. Soit $a \in]0;1[$. En s'inspirant de **1**, montrer que la partie :

$$D_a = \{(x, ax), \quad x \in [0;1]\}$$

de P vérifie $\mu(D_a) = 0$ (il n'est pas demandé de démontrer que D_a est Jordan-mesurable).

3. Soit la courbe $C = \{(x, x^3), \quad x \in [0;1]\}$. On admet que C est Jordan mesurable. Justifier que $\mu(C) = 0$.

4. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et soit C la courbe :

$$C = \{(x, f(x)), \quad x \in [0;1]\}.$$

On admet que C est Jordan mesurable. Le but est de montrer que $\mu(C) = 0$.
4.a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [0;1]^2, \quad [|x-y| \leq \delta] \Rightarrow [|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon].$$

4.b. Soit N un entier tel que $1/N \leq \delta$. On pose $x_j = j/N$ pour $j = 0, \ldots, N$ et l'on note :

$$Q_{N,j} = [x_j, x_{j+1}] \times [f(x_j) - \varepsilon, f(x_j) + \varepsilon], \quad j = 0, \ldots, N-1.$$

Montrer que

$$C \subset \cup_{j=0}^{N-1} Q_{N,j}.$$

Conclure.