Licence MASS Seconde Année **Université de Paris 1**
U.F.R. 27 **2007-2008**

Partiel d'analyse S4, Septembre 2008, Durée : 2h

L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Cet énoncé comporte 2 pages de texte.

Lorsqu'une question exige un raisonnement, la précision de celui-ci aura une part importante dans l'évaluation.

Exercice 1. (10 points)

1. (a) Rappeler (sans justifier) les développements en série entière des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{1+x},$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x},$$

et donner le rayon de convergence des séries. On admettra que les fonctions sont somme de la serie sur le disque ouvert de convergence.

   (b) Donner l'ensemble des réels x pour lesquels la seconde série est convergente.

   (c) Montrer que :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n},$$

(on pourra, par exemple, utiliser la question **1.(a)**).

2. Par exemple en utilisant la question **1.(a)**, ou par toute autre méthode, démontrer que :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)x^p.$$

3. On introduit la fonction f définie sur $]-1;1[$ comme le produit de $\frac{1}{1-x}$ et de $\frac{1}{1-x^2}$, c'est-à-dire :

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

   (a) Démontrer que pour tout $x \in]-1;1[$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}\right].$$

En déduire, à l'aide des questions **1** et **2**, le développement en série entière de f.

   (b) On introduit les nombres α_n, pour $n \in \mathbb{N}$, définis de la manière suivante. α_n est le nombre de couples $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $p + 2q = n$. Ainsi, $\alpha_5 = 3$ puisque on peut choisir trois couples (p,q) tels que $p+2q = 5$, qui sont $(5,0)$, $(3,1)$ et $(1,2)$. En formant le produit des deux séries entières de $\frac{1}{1-x}$ et de $\frac{1}{1-x^2}$, montrer que :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n.$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}.$$

4. De combien de manières peut-on faire un total de 10000 euros avec des pièces de 1 euro et de 2 euros ? (Justifier).

Exercice 2. (10 points)

Pour $x \geq 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $f(0)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad y'' + y = \frac{1}{x}.$$