TD – Feuille n° 4 – Groupe 8

Exercice 1. L'ensemble fondamental Ω est l'ensemble des permutations d'un ensemble de 4 éléments. $\text{Card}(\Omega) = 4! = 24$.

On est dans une situation d'équiprobabilité.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de lettres qui atteindront leur destinataire.

Remarquons 3 lettres parviennent à leur destinataire, la 4 ème aussi. L'événement $(X = 3)$ est donc impossible.

Ainsi, $X(\Omega) = \{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 4\}$.

— $(X = 4)$ est l'événement : « Les 4 lettres parviennent à leur destinataire ».
Il existe une seule permutation qui correspond à l'événement $(X = 4)$.
$\text{Card}(X = 4) = 1$.
$$\mathbb{P}(X = 4) = \frac{\text{Card}(X = 4)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{24}$$

— $(X = 2)$ est l'événement : « Exactement 2 lettres parviennent à leur destinataire ».
Il y a à choisir 2 éléments parmi 4 (les 2 lettres qui parviennent à leur destinataire). Il reste donc une possibilité pour la 3 ème lettre et une possibilité pour la 4 ème lettre.
$\text{Card}(X = 2) = C_4^2 \times C_1^1 \times C_1^1 = 6 \times 1 \times 1 = 6$.
$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\text{Card}(X = 2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

— $(X = 1)$ est l'événement : « Exactement 1 lettre parvient à son destinataire ».
Il y a à choisir 1 éléments parmi 4 (la lettre qui parvient à son destinataire). Il reste donc deux possibilités pour la 2 ème lettre , une possibilité pour la 3 ème lettre et une possibilité pour la 4 ème.
$\text{Card}(X = 1) = C_4^1 \times C_2^1 \times C_1^1 \times C_1^1 = 4 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$.
$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\text{Card}(X = 2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

— $(X = 0)$ est l'événement : « Aucune lettre ne parvient à son destinataire ».
On sait que $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = 1$, donc :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 4) \\
\mathbb{P}(X = 0) &= 1 - \frac{8}{24} - \frac{6}{24} - \frac{1}{24} \\
\mathbb{P}(X = 0) &= 1 - \frac{15}{24} \\
\mathbb{P}(X = 0) &= \frac{9}{24} \\
\mathbb{P}(X = 0) &= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

Calcul de l'espérance de X.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1)+2\times\mathbb{P}(X=2)+4\times\mathbb{P}(X=4)\\ &= 0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{24}\\ &= 1\end{aligned}$$

L'espérance de X est égale à 1.

Calcul de la variance de X.

D'après la formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\big(\mathbb{E}(X)\big)^2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 0^2\times\mathbb{P}(X=0)+1^2\times\mathbb{P}(X=1)+2^2\times\mathbb{P}(X=2)+4^2\times\mathbb{P}(X=4)\\ &= 0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{4}+16\times\frac{1}{24}\\ &= 2\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\big(\mathbb{E}(X)\big)^2=2-1^2=1$. La variance de X est égale à 1.

Exercice 2. L'ensemble fondamental Ω est l'ensemble des combinaisons de 8 éléments parmi 16 éléments. **Card**$(\Omega)=C_{16}^{8}=12870$.

On est dans une situation d'équiprobabilité.

L'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire N est : $N(\Omega)=\{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ 8\}$.

- $\mathbb{P}(N=0)=\dfrac{C_8^0\times C_8^8}{C_{16}^8}=\dfrac{1}{12870}$.
- $\mathbb{P}(N=1)=\dfrac{C_8^1\times C_8^7}{C_{16}^8}=\dfrac{64}{12870}$.
- $\mathbb{P}(N=2)=\dfrac{C_8^2\times C_8^6}{C_{16}^8}=\dfrac{784}{12870}$.
- $\mathbb{P}(N=3)=\dfrac{C_8^3\times C_8^5}{C_{16}^8}=\dfrac{3136}{12870}$.
- $\mathbb{P}(N=4)=\dfrac{C_8^4\times C_8^4}{C_{16}^8}=\dfrac{4900}{12870}$.
- $\mathbb{P}(N=5)=\dfrac{C_8^5\times C_8^3}{C_{16}^8}=\dfrac{3136}{12870}$.
- $\mathbb{P}(N=6)=\dfrac{C_8^6\times C_8^2}{C_{16}^8}=\dfrac{784}{12870}$.
- $\mathbb{P}(N=7)=\dfrac{C_8^7\times C_8^1}{C_{16}^8}=\dfrac{64}{12870}$.
- $\mathbb{P}(N=8)=\dfrac{C_8^8\times C_8^0}{C_{16}^8}=\dfrac{1}{12870}$.

Calcul de $\mathbb{P}(3\leqslant N\leqslant 5)$.

$$\mathbb{P}(3\leqslant N\leqslant 5)=\mathbb{P}(N=3)+\mathbb{P}(N=4)+\mathbb{P}(N=5)=\frac{3136}{12870}+\frac{4900}{12870}+\frac{3136}{12870}=\frac{11172}{12870}\approx 0,868.$$

Loi de probabilité de N.

la loi de probabilité de N est résumée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(N=k)$	$\frac{1}{12870}$	$\frac{64}{12870}$	$\frac{784}{12870}$	$\frac{3136}{12870}$	$\frac{4900}{12870}$	$\frac{3136}{12870}$	$\frac{784}{12870}$	$\frac{64}{12870}$	$\frac{1}{12870}$

Calcul de l'espérance de N.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{k=0}^{8} k\mathbb{P}(N=k) \\
&= 0 \times \mathbb{P}(N=0) + 1 \times \mathbb{P}(N=1) + 2 \times \mathbb{P}(N=2) + \cdots + 8 \times \mathbb{P}(N=8) \\
&= 0 \times \frac{1}{12870} + 1 \times \frac{64}{12870} + 2 \times \frac{784}{12870} + \cdots + 8 \times \frac{1}{12870} \\
&= 4
\end{aligned}$$

L'espérance de N est égale à 4.

Calcul de la variance de N.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(N) &= \mathbb{E}\big(N - \mathbb{E}(N)\big)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{8} (k-4)^2 \, \mathbb{P}(N=k) \\
&= (0-4)^2 \times \mathbb{P}(N=0) + (1-4)^2 \times \mathbb{P}(N=1) + (2-4)^2 \times \mathbb{P}(N=2) + \cdots + (8-1)^2 \times \mathbb{P}(N=8) \\
&= 16 \times \frac{1}{12870} + 9 \times \frac{64}{12870} + 4 \times \frac{784}{12870} + \cdots + 49 \times \frac{1}{12870} \\
&= \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

La variance de N est égale à $\dfrac{16}{15}$.

Exercice 3. On lance n fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. On suppose que les lancers sont identiques et indépendants.

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir strictement plus de piles que de faces ».

B : « Obtenir strictement plus de faces que de piles ».

La pièce de monnaie est équilibrée, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

On distingue deux cas :

— n impair :
Dans ce cas $B = \overline{A}$ et donc l'ensemble $\{A \ ; \ B\}$ constitue un système complet d'événements (une partition de Ω). On a donc :
$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$ et $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ soit $2\mathbb{P}(A) = 1$ soit $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$.

— n pair :
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de piles obtenues. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n \ ; \ \frac{1}{2}\right)$.
On pose $k = \dfrac{n}{2}$. On a donc : $A = (X > k)$ et $B = (X < k)$.

En conséquence, l'ensemble $\{A\ ,\ B\ ,\ (X=k)\}$ constitue un système complet d'événements (une partition de Ω). On a donc :

$$\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(X=k)=1$$

Or, $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(X=k)=C_n^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(X=k)=1 &\iff \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(X=k)=1\\
&\iff 2\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(X=k)\\
&\iff \mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}-\frac{\mathbb{P}(X=k)}{2}\\
&\iff \mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}-\frac{C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2}\\
&\iff \mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}-\frac{C_n^k}{2^{n+1}}\\
&\iff \mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}-\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$P(A)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{si}\quad n \text{ impair}\\[2ex] \dfrac{1}{2}-\dfrac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}} & \text{si}\quad n \text{ pair}\end{cases}$$

Exercice 4. Un tirage est un couple $(i\ ,\ j)$ avec $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant n$. Donc l'ensemble fondamental est : $\Omega=\big\{(i,j)\ /\ 1\leqslant i\leqslant n\ ;\ 1\leqslant j\leqslant i\big\}$. Comme Ω est un ensemble fini, on lui associe la tribu $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$.

On a $Y(\Omega)=\{1,\ldots,n\}$ et $Y\big((i,j)\big)=j$. On note X le numéro de la première urne choisie, qui est aussi une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A})$, donc $X(\Omega)=\{1,\ldots,n\}$.

Pour tout $j\in\{1,\ldots,n\}$, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\big[(Y=j)\cap(X=i)\big]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(Y=j\mid X=i)\,\mathbb{P}(X=i)$$

D'autre part, $\mathbb{P}(X=i)=\dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(Y=j\mid X=i)=\begin{cases}\dfrac{1}{i} & \text{si}\quad j\leqslant i\\ 0 & \text{si}\quad j>i\end{cases}$.

D'où $\mathbb{P}(Y=j)=\displaystyle\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}\times\frac{1}{n}$, soit $\mathbb{P}(Y=j)=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$.

La loi de probabilité de Y est définie par :

$$\forall j\in\{1,\ldots,n\},\quad \mathbb{P}(Y=j)=\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$$

Calcul de l'espérance de Y.

$\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}.$

On a donc une double somme indicée par $1 \leqslant j \leqslant n$ et $j \leqslant i \leqslant n$. On peut aussi dire que cela revient à écrire $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant i$.

Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j$. Mais $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2}$ (somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1).

Finalement,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n+3}{4}$$

Exercice 5. Calcul de c_1 et c_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{c_1}{n+1} + \frac{c_2}{n} = \frac{c_1 n + c_2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{(c_1+c_2)n + c_2}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Par identification : $\left\{\begin{array}{rcl} c_1+c_2 & = & 0 \\ c_2 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} c_1 & = & -c_2 \\ c_2 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} c_1 & = & -1 \\ c_2 & = & 1 \end{array}\right.$

En conséquence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Détermination de la valeur de a.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{a}{n(n+1)}$.

De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n(n+1)} = a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = a\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$. Par conséquent, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = a\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+1})$.

D'autre part,

$$\sum_{n=1}^{N}(u_n-u_{n+1}) = (u_1-u_2)+(u_2-u_3)+\cdots+(u_{N-1}-u_N)+(u_N-u_{N+1}) = u_1 - u_{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

Comme, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = 1$ alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}(u_n-u_{n+1}) = 1$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n-u_{n+1}) = 1$.

Par suite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = a\times 1 = a$. Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = 1$.

On en conclut que $a = 1$.

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Exercice 6 (A ne pas faire « hors programme »).

Exercice 7. a) L'ensemble fondamental est : $\Omega = [0\ ;\ 1]$. La variable aléatoire X est définie par :

$$\begin{array}{rccl} X: & [0\ ;\ 1] & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) = 1-\omega \end{array}$$

Comme $\omega \in [0\ ;\ 1]$ alors $1-\omega \in [0\ ;\ 1]$ soit $X(\omega) \in [0\ ;\ 1]$. La variable X est donc à valeurs dans $[0, 1]$.
— Si $x < 0$: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$.
— Si $x \geqslant 1$: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 1$.
— Si $0 \leqslant x < 1$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(1-\omega \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(1-x \leqslant \omega \leqslant 1) \\ &= \mathbb{P}([1-x\ ;\ 1]) \\ &= 1-(1-x) \\ &= x \end{aligned}$$

Par suite,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0\ ;\ 1])$, donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{12}$.

Rappel :
Si X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $\mathcal{U}\big([a\ ;\ b]\big)$ alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

b) L'ensemble fondamental est : $\Omega =]0\ ;\ 1]$. La variable aléatoire Y est définie par :

$$\begin{array}{rccl} Y: &]0\ ;\ 1] & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & Y(\omega) = -\ln(\omega) \end{array}$$

Comme $\omega \in]0\ ;\ 1]$ alors $\ln(\omega) \in]-\infty\ ;\ 0]$ soit $-\ln(\omega) \in [0\ ;\ +\infty[$ soit $Y(\omega) \in [0\ ;\ +\infty[$.
La variable Y est à valeurs dans $[0\ ;\ +\infty[$.
— Si $y < 0$: $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$.
— Si $y \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(-\ln\omega \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(\ln\omega \geqslant -y) \\ &= \mathbb{P}(\omega \geqslant \mathrm{e}^{-y}) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{e}^{-y} \leqslant \omega \leqslant 1) \\ &= 1-\mathrm{e}^{-y} \end{aligned}$$

Par suite,
$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-y} & \text{si} \quad y \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, donc $\mathbb{E}(Y) = 1$ et $\mathbb{V}(Y) = 1$.

Rappel :
Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ alors :
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

c) L'ensemble fondamental est : $\Omega = [0\ ;\ 1]$. La variable aléatoire Z est définie par :
$$\begin{array}{rccc} Z: & [0\ ;\ 1] & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & Z(\omega) \end{array} \qquad \text{avec} \quad Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \omega \in [0\ ;\ 0,5[\\ \omega & \text{si} \quad \omega \in [0,5\ ;\ 1] \end{cases}$$

Z prend ses valeurs dans $\{0\} \cup [0,5\ ;\ 1]$.
— Si $z < 0$: $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = 0$.
— Si $z \geqslant 1$: $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = 1$.
— Si $0 \leqslant z < 0,5$:
$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z < z) \\ &= \mathbb{P}(Z = 0) \\ &= \mathbb{P}([0\ ;\ 0,5]) \\ &= 0,5 - 0 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

— Si $0,5 \leqslant z < 1$:
$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z < z) \\ &= \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(0,5 \leqslant Z \leqslant z) \\ &= 0,5 + z - 0,5 \\ &= z \end{aligned}$$

Par suite, la fonction de répartition de Z est :
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 0 \\ 0,5 & \text{si} \quad 0 \leqslant z < 0,5 \\ z & \text{si} \quad 0,5 \leqslant z < 1 \\ 1 & \text{si} \quad z \geqslant 1 \end{cases}$$

Remarque : La fonction de répartition F_Z de Z est discontinue en 0. Ainsi, la variable aléatoire Z n'est ni continue ni discrète.
Plus précisément, la loi de Z est constituée d'une partie continue et une d'une partie discrète. On dit que Z est une variable aléatoire mixte.

Exercice 8. X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Sa fonction de répartition est :
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La médiane m de la loi de X est solution de l'équation $F_X(m) = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F_X(m) = \frac{1}{2} &\iff 1 - e^{-\lambda\, m} = \frac{1}{2} \\ &\iff e^{-\lambda\, m} = \frac{1}{2} \\ &\iff -\lambda m = \ln\frac{1}{2} \\ &\iff -\lambda m = -\ln 2 \\ &\iff m = \frac{\ln 2}{\lambda} \end{aligned}$$

Exercice 9. X est une variable aléatoire continue à valeurs dans $[1\ ;\ +\infty[$ de densité $f(x) = \dfrac{a}{x^3}$.

On a donc : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

D'autre part,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^3}\,dx = a\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \Big[-\frac{1}{2x^2}\Big]_1^{+\infty} = a\left(0 - \Big(-\frac{1}{2}\Big)\right) = \frac{a}{2}.$$

Ainsi, $\dfrac{a}{2} = 1$ soit $a = 2$.

En conclusion, la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire X est définie par :

$$\forall x \in [1\ ;\ +\infty[, \quad f(x) = \frac{2}{x^3}$$

Calcul de l'espérance de X.

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x \times \frac{2}{x^3}\,dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 2\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{+\infty} = 2\big(0-(-1)\big) = 2.$$

L'espérance de X est égale à 2.

Calcul de la variance de X.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^2 \times \frac{2}{x^3}\,dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = 2\Big[\ln x\Big]_1^{+\infty} = +\infty.$$

D'après la formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = +\infty$.

La variable aléatoire X n'a pas de variance.

Exercice 10. Détermination de la valeur de a.

T est une variable aléatoire à valeurs dans $[0\ ;\ +\infty[$. Calculons la fonction de répartition de Z.

— Si $t < 0$: $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t) = 0$.

— Si $t \geqslant 0$: $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t) = 1 - \mathbb{P}(T > t) = 1 - a(t^2+1)\mathrm{e}^{-2t}$.

T est une variable aléatoire continue, donc F_T est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0.

Or, $F_T(0) = 1 - a$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^-} F_T(t) = 0$. On en déduit que $1 - a = 0$ soit donc $a = 1$.

Finalement, la fonction de répartition de Z est définie par :

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - (t^2+1)\mathrm{e}^{-2t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Calcul de $\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2)$.

T est une variable aléatoire continue. On a donc :

$$\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2) = \mathbb{P}(1 < T \leqslant 2) = F_T(2) - F_T(1) = 2e^{-2} - 5e^{-4} = e^{-2}(2 - 5e^{-2}) \approx 0.179.$$

Calcul de $\mathbb{P}(T \geqslant 3)$.

$$\mathbb{P}(T \geqslant 3) = \mathbb{P}(T > 3) = (3^2 + 1)\mathrm{e}^{-2\times 3} = 10\mathrm{e}^{-6} \approx 0,025$$

Détermination de la densité de probabilité de la variable aléatoire T.

Pour tout $t > 0$, $\;f_T(t) = F_T'(t) = \big(-2t + 2(t^2+1)\big)\exp(-2t) = 2\left(t^2 - t + 1\right)\mathrm{e}^{-2t}$.

Pour tout $t < 0$, $\;f_T(t) = F_T'(t) = 0$.

Pour $t = 0$ (où la fonction F_T n'est pas dérivable), on prend n'importe quelle valeur réelle pour image de f. Par exemple, on prend $f(0) = 0$.

Par suite,

$$f_T(t) = \begin{cases} 2(t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-2t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

Calcul de l'espérance de T.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} t f(t)\, dt + \int_{0}^{+\infty} t f(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} t \times 0\, dt + \int_{0}^{+\infty} t \times 2(t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-2t}\, dt \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} t(t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-2t}\, dt \\
&= 2\int_{0}^{\infty} t^3\mathrm{e}^{-2t}\, dt - 2\int_{0}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-2t}\, dt + 2\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\, dt
\end{aligned}$$

Pour tout $k \geqslant 1$, on note $I_k = \displaystyle\int_0^{\infty} t^k \mathrm{e}^{-2t} dt$. Calculons I_K par intégration par partie (IPP).

On pose $u = t^k$ et $v' = \mathrm{e}^{-2t}$ donc $u' = kt^{k-1}$ et $v = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^{+\infty} uv'\, dt \\
&= \Big[uv\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'v\, dt \\
&= -\frac{1}{2}\Big[t^k\mathrm{e}^{-2t}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}kt^{k-1}\mathrm{e}^{-2t}\, dt \\
&= -\frac{1}{2}\big(0 - 0\big) + \frac{k}{2}\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-2t} \\
&= \frac{k}{2} I_{k-1}
\end{aligned}$$

De plus, $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

Donc $I_1 = \dfrac{1}{2}I_0 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$, $\;I_2 = \dfrac{2}{2}I_1 = 1\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$, $\;I_3 = \dfrac{3}{2}I_2 = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{8}$, et $I_4 = \dfrac{4}{2}I_3 = 2\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{4}$.

En conséquence,

$$\mathbb{E}(T) = 2I_3 - 2I_2 + 2I_1 = 2\times\frac{3}{8} - 2\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

L'espérance de T est égale à $\dfrac{3}{4}$.

Calcul de la variance de T.

D'après la formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2$.

De plus, $\mathbb{E}(T^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2\times 2\big(t^2-t+1\big)\mathrm{e}^{-2t}\,dt = 2\big(I_4-I_3+I_2\big) = 2\times\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$.

En conséquence, $\mathbb{V}(T) = \dfrac{5}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{11}{16}$.

La variance de T est égale à $\dfrac{11}{16}$.

Exercice 11. Exercice à faire dans la feuille 6.

Exercice 12. X est une variable aléatoire de densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kx(5-x) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Comme f est une densité de probabilité, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Or, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = k\int_0^5 x(5-x)\,dx = k\left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^5 = k\frac{125}{6}$.

On en déduit que $k\dfrac{125}{6} = 1$ soit $k = \dfrac{6}{125}$.

La fonction densité de probabilité f de la variable aléatoire X est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{125}x\big(5-x\big) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Détermination de la fonction de répartition de X.

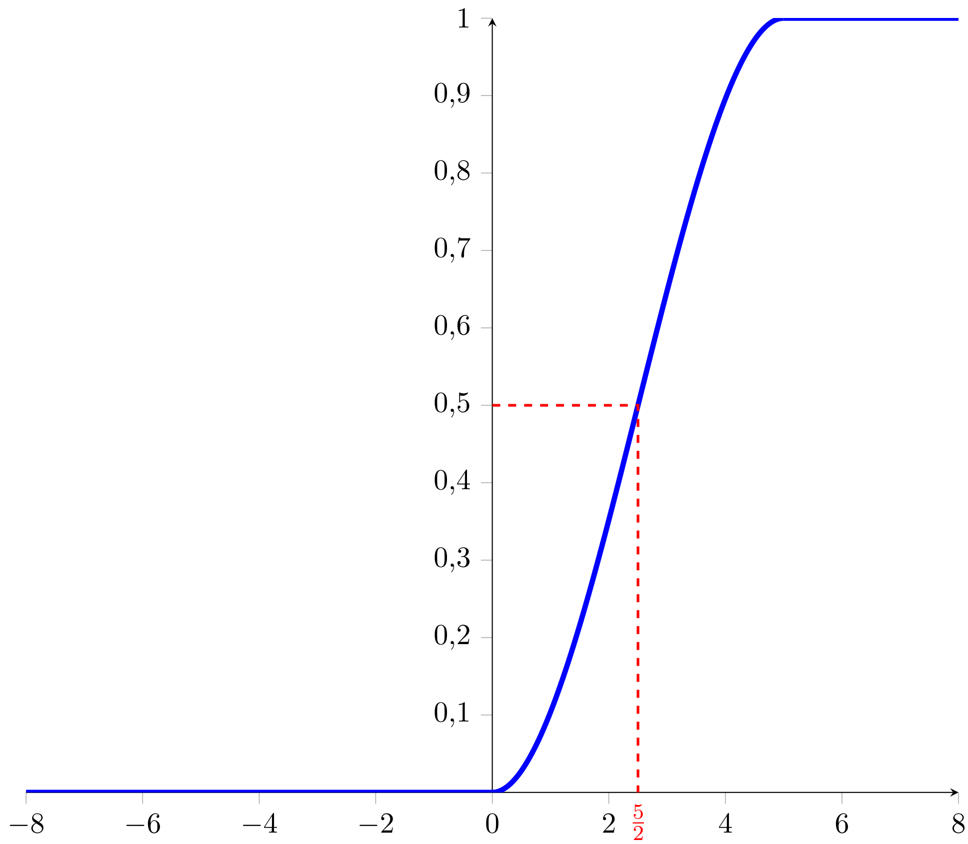
— Si $x < 0$: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$.
— Si $x \geqslant 5$: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 1$.
— Si $0 \leqslant x < 5$:

$$\begin{aligned} F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \int_0^x f(t)\,dt \\ &= \frac{6}{125}\int_0^x t(5-t)\,dt \\ &= \frac{6}{125}\left[\frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^x \\ &= \frac{6}{125}\left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \\ &= \frac{1}{125}x^2\Big(15-2x\Big) \end{aligned}$$

En conséquence,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{125}x^2\Big(15 - 2x\Big) & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 5 \end{cases}$$

Représentation graphique de la courbe de la fonction F_X.



b) **Calcul de l'espérance de X.**

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{6}{125}\int_0^5 x^2(5-x)\,dx = \frac{6}{125}\left[\frac{5}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4\right]_0^5 = 6\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2}$$

L'espérance de X est égale à $\dfrac{5}{2}$.

Calcul de l'écart-type de X.

D'après la formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.

Or, $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_0^5 x^2 f(x)\,dx = \frac{6}{125}\int_0^5 x^3(5-x)\,dx = \frac{6}{125}\left[\frac{5}{4}\,x^4 - \frac{1}{5}\,x^5\right]_0^5 = 30\left(\frac{5}{4} - 1\right) = \frac{15}{2}$.

Ainsi, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \left(\dfrac{15}{2}\right) - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$.

En conséquence, $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. L'écart-type de X est égal à $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Calcul de la médiane de X.

La médiane m de X est solution de l'équation $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[0\ ;\ 5]$.

D'après le graphe, m doit être proche de $\dfrac{5}{2}$, ce que des considération de symétrie de la densité induisent également. En effet, $F_X\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{125} \times \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \left(15 - 2 \times \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

En en conclut que la médiane de X est égale à $\dfrac{5}{2}$.

Exercice 13. X est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) — D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X = 0) = 1 \quad ①$$

D'autre part, X est symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont même loi donc :

$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(-X > 0)$$

Or, $\mathbb{P}(-X > 0) = \mathbb{P}(X < 0)$ donc $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X < 0)$ ②. On remplace ② dans ① et on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X < 0) + P(X = 0) = 1 &\iff 2\mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X = 0) = 1 \\ &\iff 2\mathbb{P}(X < 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{P}(X = 0) \geqslant 0$ donc $-\mathbb{P}(X = 0) \leqslant 0$ soit $1 - \mathbb{P}(X = 0) \leqslant 1$.

En conséquence, $2\mathbb{P}(X < 0) \leqslant 1$ soit donc $\mathbb{P}(X < 0) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

— X est symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont même loi, donc :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 0) = \mathbb{P}(-X \leqslant 0) = \mathbb{P}(X \geqslant 0)$$

D'autre part, $\mathbb{P}(X \geqslant 0 = 1 - \mathbb{P}(X < 0)$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant 0) = 1 - \mathbb{P}(X < 0)$.

De plus,

$$\mathbb{P}(X < 0) \leqslant \frac{1}{2} \iff -\mathbb{P}(X < 0) \geqslant -\frac{1}{2} \iff 1 - \mathbb{P}(X < 0) \geqslant 1 - \frac{1}{2} \iff \mathbb{P}(X \leqslant 0) \geqslant \frac{1}{2}$$

On en déduit que la médiane de X est égale à 0.

b) Soit $J \subset \mathbb{N}$. On distingue deux cas :

— X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{j \in J}$.

Comme X et $-X$ ont même loi, forcément quand $x_j \in I$, alors $-x_j \in I$ et $\mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}(X = -x_j)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{j \in J} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) \\ &= \sum_{\substack{j \in J \\ x_j > 0}} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) + \sum_{\substack{j \in J \\ x_j < 0}} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) + 0 \times \mathbb{P}(X = 0) \\ &= \sum_{\substack{j \in J \\ x_j > 0}} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) + \sum_{\substack{j \in J \\ x_j < 0}} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) \\ &= \sum_{\substack{j \in J \\ x_j > 0}} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) - \sum_{\substack{j \in J \\ x_j > 0}} x_j \, \mathbb{P}(X = -x_j) \\ &= \sum_{\substack{j \in J \\ x_j > 0}} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) - \sum_{\substack{j \in J \\ x_j > 0}} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) \quad \text{car } X \text{ et } -X \text{ ont même loi.} \end{aligned}$$

D'autre part, $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ donc $\sum\limits_{\substack{j\in J\\ x_j>0}} x_j\,\mathbb{P}(X = x_j) < \infty$.

En conséquence,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\substack{j\in J\\ x_j>0}} x_j\,\mathbb{P}(X = x_j) - \sum_{\substack{j\in J\\ x_j>0}} x_j\,\mathbb{P}(X = x_j) = 0$$

— X est une variable aléatoire continue.
On a donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(-X < -x) = 1 - \mathbb{P}(-X \leqslant -x) = 1 - F_X(-x)$$

car la variable aléatoire X est continue.
D'autre part, en tout x où F_X est dérivable, $F'_X(x) = 0 - (F_X(-x))' = F'_X(-x)$, d'où $f_X(x) = f_X(-x)$. Ce qui prouve que la densité de probabilité f_X est une fonction paire.

En conséquence, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)dx = 0$ car la fonction $x \mapsto x\,f_X(x)$ est impaire (produit d'une fonction paire et une fonction impaire).