Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. première année 2022 – 2023

Feuilles de TD, cours de L1 Probabilités

Jean-Marc Bardet (Université Paris 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Un peu de statistique descriptive

1. **(*)** Calculer la moyenne empirique et l'écart-type empirique du nombre de lettres dans les mots de cette phrase.

2. **(*)** On considère les longueurs de 30 oeufs de coucous (en mm):

22.5	20.1	23.3	22.9	23.1	22.0	22.3	23.6	24.7	23.7
24.0	20.4	21.3	22.0	24.2	21.7	21.0	20.1	21.9	21.9
21.7	22.6	20.9	21.6	22.2	22.5	22.2	24.3	22.3	22.6

   - Construire un tableau de fréquences pour des classes de longueur 0.5 mm. Illustrer graphiquement les données à l'aide d'un histogramme, puis d'un polygone des fréquences cumulées. En déduire la médiane empirique.
   - Calculer la moyenne empirique et l'écart-type empirique à partir des 30 données, puis à partir des données par classes. Différence?

3. **(*)** Les salaires hebdomadaires (en dollars) d'un échantillon de femmes d'une même entreprise en 2014 étaient:

Salaires hebdomadaires (Dollars)	Nombre de femmes
moins de 150	1
entre 150 et 200	4
entre 200 et 250	28
entre 250 et 300	42
entre 300 et 350	33
entre 350 et 400	18
entre 400 et 450	13
entre 450 et 600	9
600 et plus	2

   (a) Représenter par un histogramme la répartition des salaires. Construire le polygône des fréquences cumulées et en déduire la médiane et les quantiles à 10% et 90% de cette distribution. Quel est le ratio entre ces deux quantiles (mesure de la répartition des salaires)?

   (b) Calculer la moyenne et l'écart type de cette distribution.

   (c) Que se passe t-il pour la médiane, la moyenne et l'écart-type si chaque femme est augmentée de 50 dollars par semaine? Est augmentée de 10%?

4. **(*)** On a demandé à 1000 étudiants et à 1500 étudiantes la couleur de leurs yeux:

Couleur des yeux	Nombre d'étudiants	Nombre d'étudiantes
Bleu	420	650
Vert	120	150
Marron	450	680
Divers	10	20

Représenter sur un même graphe les deux diagrammes à bâtons des fréquences. Peut-on conclure que les hommes ont des yeux de couleur différente de ceux des femmes?

5. **(*)** 60 % de la population gagne moins que le salaire moyen a dit un politicien. Est-ce possible? Illustrer votre réponse.

6. **(*)** Un ensemble d'observations a pour moyenne 20 et pour écart type 4. Quel est l'effet sur la moyenne empirique et sur l'écart-type empirique de:
   - On ajoute 3 à toutes les observations.
   - On multiplie toutes les observations par 10.
   - On soustrait 12 à toutes les observations, puis on les divise par 2.

7. **(**)** On constate qu'en France il y une personne sur 6 qui possède un ordinateur personnel et une personne sur 25 qui est chauve. On constate aussi que une personne sur 75 est chauve et possède un ordinateur personnel. Quel est le pourcentage de Français chevelus? De Français chauves sans ordinateur? De Français chevelus avec ordinateur? De Français chevelus sans ordinateur?

8. **(***)** Soit $(x_1, \ldots, x_n)$, n valeurs réelles observées avec $n \in \mathbf{N}^*$.
   (a) Montrer que $\overline{x}$ est l'unique minimum de la fonction $f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$.
   (b) Montrer que la fonction $g(x) = \sum_{i=1}^n |x_i - x|$ est minimisée par la médiane de $(x_1, \ldots, x_n)$. Est-ce l'unique minimum?

9. **(***)** (Paradoxe de Simpson) Dans l'état de Floride en 1974, on a décompté les condamnations prononcées pour meurtres. Comme aux USA les statistiques ethniques sont autorisées, on a réparti celles-ci en fonction de la couleur de peau et on obtient les résultats suivants:
   - Parmi les "blancs" meurtriers, 72 ont été condamnés à mort et 2185 ont été condamnés à une autre peine;
   - Parmi les "noirs" meurtriers, 59 ont été condamnés à mort et 2448 ont été condamnés à une autre peine.

   (a) Quelles sont les fréquences de verdict de condamnation à mort suivant la couleur de peau du meurtrier? Quelle population vous semblent être privilégiée?
   (b) On peut rendre un peu plus précis ces résultats en distinguant la couleur de peau de la victime. Ainsi lorsque la victime était blanche, les meurtriers blancs ont écopé 72 fois de la peine de mort et 2074 fois d'une autre peine et les meurtriers noirs ont écopés 48 fois de la peine de mort et 239 fois d'une autre peine. En déduire les résultats lorsque la victime était noire (on pourra notamment utiliser des dessins d'ensembles). Qu'en déduisez vous finalement quant à la justice en Floride? (on dira que la couleur de peau de la victime est une variable de confusion)

10. **(**)** Soit $(x_1, \ldots, x_{2n+1})$, $2n+1$ nombres réels inclus dans $[0,1]$. Notons respectivement $\overline{x}$ et $\overline{m}$ la moyenne empirique et la médiane empirique de $(x_1, \ldots, x_{2n+1})$.
    (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i \geq (n+1)\,\overline{m}$. En déduire que $\overline{x} \geq \frac{1}{2}\,\overline{m}$.
    (b) Montrer que $\overline{x} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \overline{m}\right)$.

(c) Soit $\overline{\sigma^2}$ la variance empirique de $(x_1, \dots, x_{2n+1})$. Montrer que

$$\max\Big(0\,,\ \frac{1}{2}\left(\overline{m}\right)^2 - \left(\overline{x}\right)^2\Big) \le \overline{\sigma^2} \le \overline{x}(1-\overline{x}).$$

11. **(*)** Soit $n \ge 2$ et $(y_i)_{1\le i\le n}$ une famille de réels non tous égaux. Soit le nuage de points $(x_i, y_i)_{1\le i\le n}$, où les $x_i = 1$ pour $1 \le i \le n-1$ et $x_n = 2$. Déterminer l'équation de la droite de régression par moindres carrés de ce nuage de points et le coefficient de détermination R^2.

12. **(***)** Pour $n \ge 2$, on a observé la famille de couples de nombres réels $\big((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\big)$, où les x_i ne sont pas tous égaux. Supposons qu'il existe $a^* \in \mathbf{R}$ et $b^* \in \mathbf{R}$, des paramètres inconnus, tels que $y_i = a^*\, x_i + b^* + \varepsilon_i$ pour tout $1 \le i \le n$, où $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une famille de réels non observés.

    (a) Supposons, seulement dans cette question, que $\varepsilon_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Déterminer l'équation de la droite de régression par moindres carrés passant du nuage de points $(x_i, y_i)_{1\le i\le n}$.

    (b) Désormais les ε_i sont des nombres réels quelconques non observés. On note $y = \widehat{a}\, x + \widehat{b}$ la droite de régression par moindres carrés du nuage de points $(x_i, y_i)_{1\le i\le n}$ et $\widehat{\varepsilon}_i = y_i - \widehat{a}\, x_i - \widehat{b}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \widehat{\varepsilon}_i = 0$.

    (c) On note respectivement $\overline{x}$ et $\overline{\varepsilon}$ les moyennes empiriques des (x_i) et des (ε_i), $\overline{\sigma}_x^2$ la variance empirique des (x_i) et $\overline{\sigma}_{x,\varepsilon}$ la covariance empirique entre (x_i) et (ε_i). Montrer que $\widehat{a} = a^* + \frac{\overline{\sigma}_{x,\varepsilon}}{\overline{\sigma}_x^2}$, puis montrer que $\widehat{\varepsilon}_i = (\varepsilon_i - \overline{\varepsilon}) - \frac{\overline{\sigma}_{x,\varepsilon}}{\overline{\sigma}_x^2}\,(x_i - \overline{x})$.

    (d) En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\widehat{\varepsilon}_i\right)^2 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$. Ne pouvait-on pas montrer ce résultat plus simplement?

Feuille n^o 2:

Espace de probabilité, événements et dénombrement

1. **(*)** On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que ce soit une dame (décrire l'ensemble fondamental et la probabilité considérée) ? On en choisit deux. Quelle est la probabilité que ce soit deux dames (décrire l'ensemble fondamental et la probabilité considérée)?

2. **(*)** En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder?

3. **(*)** Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.
   (a) Calculer le nombre d'éléments de A.
   (b) Dénombrer les éléments de A:
   a) composés de quatre chiffres distincts;
   b) composés d'au moins deux chiffres identiques;
   c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7.

4. **(*)** Une boîte contient 3 jetons, un rouge, un vert et un bleu. On considère l'expérience consistant à tirer au hasard un jeton dans la boîte, à l'y remettre puis à en tirer un second. Décrire l'ensemble fondamental et la mesure de probabilité. Déterminer la probabilité de ne pas avoir un jeton rouge. Même question si le second jeton est tiré sans qu'on ait remis le premier.

5. **(*)** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et soit E, F et G trois événements de $\mathcal{A}$. Trouver des expressions pour les événements suivants que l'on dira réalisés lorsque:
   - E seul l'est;
   - E et G le sont mais pas F;
   - au moins l'un des trois l'est;
   - au moins deux d'entre eux le sont;
   - les trois le sont;
   - aucun ne l'est;
   - au plus deux d'entre eux le sont;
   - exactement deux le sont;
   - au plus trois le sont.

6. **(**)** Au Scrabble, on a un tirage avec 7 lettres distinctes. Combien de mots de 7 lettres peut-on constituer au maximum à partir de ce tirage? Combien de mots de 3 lettres? Répondre aux mêmes questions si deux des lettres (et uniquement 2) du tirage initial sont identiques?

7. **(**)** On demande à 5 personnes d'écrire leur nom sur un papier, puis on mélange les papiers et on les redistribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne ait le papier avec son nom (décrire l'ensemble fondamental, la tribu et l'événement considéré)? Que tous aient le papier avec leur nom?

8. **(**)** On constitue un groupe de 6 personnes choisies au hasard parmi 25 femmes et 32 hommes.
1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes?
2) Après avoir précisé l'ensemble fondamental, la tribu et l'événement considéré, dans chacun des cas suivants, quelle est la probabilité d'obtenir pour ces 6 personnes: a) uniquement des hommes; b) des personnes de même sexe; c) au moins une femme et au moins un homme.

9. **(**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit A un événement de $\mathcal{A}$ non réduit à l'ensemble vide. On définit pour tout $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) = \mathbb{P}(B \cap A)/\mathbb{P}(A)$. Montrer que μ est bien une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Serait-il possible de définir μ sur un autre espace probabilisable? Mêmes questions avec ν telle que pour tout $B \in \mathcal{A}$, $\nu(B) = \mathbb{P}(B \cup A)$.

10. **(***)** Dans une assemblée de n personnes, à partir de quelle valeur de n a-t-on au moins une chance sur deux que deux personnes soient nées le même jour? Préciser les hypothèses faites...

Feuille n^o 3:
Probabilités et probabilités conditionnelles

1. **(*)** On considère une population composée de 48% d'hommes et de 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est de 0.05, qu'une femme soit daltonienne 0.0025. Quelle proportion de la population est daltonienne?

2. **(*)** Trouver la probabilité pour que dans une famille de quatre enfants on ait: (a) au moins un garçon, (b) au moins un garçon et une fille. On suppose que la probabilité de la naissance d'un garçon est de 0.51.

3. **(**)** On a lancé 10 fois une pièce non biaisée et l'on a obtenu 10 fois pile. Quelle était la probabilité d'un tel tirage? On lance une onzième fois la pièce. Quelle est la probabilité d'avoir pile sachant que les dix lancers précédents étaient des piles? Quelle est la probabilité que le onzième lancer soit pile?

4. **(*)** On effectue le dépistage systématique sur une population donnée d'une maladie qui affecte en général 15% des individus. On réalise un test qui donne 95% de résultats positifs pour les personnes malades et 10% de résultats positifs parmi les non malades. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard soit malade sachant que le test a donné un résultat positif? soit non malade sachant que le test a donné un résultat négatif?

5. **(**)** Deux joueurs d'échecs effectuent un match en trois parties. Lorsque ces deux joueurs se rencontrent on sait en général que A gagne une fois sur 4, que B gagne une fois sur 3 et que le reste du temps il y a nul. Sachant que l'on sait après le tournoi que c'est le même joueur qui a gagné les trois parties, quelle est la probabilité que ce soit A?

6. **(**)** On estime que le gérant d'un portefeuille boursier bien informé a, pour une action donnée achetée, une probabilité égale à 4/5 de voir l'action monter. On estime aussi qu'un gérant mal informé a une probabilité égale à 1/2 de voir l'action baisser. On estime aussi que 30% des gérants de portefeuilles boursiers sont bien informés, les autres ne l'étant pas. Un gérant donné achète 5 actions indépendantes les unes des autres. 3 montent et 2 baissent. Quelle est la probabilité qu'il soit bien informé?

7. **(**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit A et B deux événements de $\mathcal{A}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
   (b) Montrer que $\big(\mathbb{P}(A \cap B)\big)^2 \leq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$.
   (c) A-t-on $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$? Et $\mathbb{P}(A \mid B) \leq \mathbb{P}(A)$?

8. **(***)** On connaît approximativement les données suivantes: deux gauchers qui ont un enfant voit celui-ci avoir une chance sur deux d'être gaucher, qui devient une chance sur cinq si un parent est gaucher et l'autre droitier, qui devient une chance sur dix si les deux parents sont droitiers. Quelle est la proportion de gauchers dans la population totale?

Feuille n^o 4:
Variables aléatoires

1. **(**)** On considère 4 lettres et les 4 enveloppes correspondantes. On met au hasard les 4 lettres dans les enveloppes et on définit la variable aléatoire X comme le nombre de lettres qui atteindront leur destinataire. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

2. **(***)** On considère 8 hommes et 8 femmes, dont on extrait par tirage au sort un groupe de 8 personnes. On note N la variable aléatoire égale au nombre de femmes du groupe. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(3 \leq N \leq 5)$. Donner la loi de probabilité de N, son espérance et sa variance.

3. **(**)** On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces?

4. **(***)** On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit d'abord uniformément une urne, puis uniformément une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de Y? Son espérance?

5. **(**)** On suppose la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = a\,\dfrac{1}{n(n+1)}$. Déterminer c_1 et c_2 tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{c_1}{n+1} + \dfrac{c_2}{n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. En déduire a pour que la loi de X soit bien une loi de probabilité. Quelle est l'espérance de X?

6. **(***)** On suppose que le nombre de connexions par jour sur un serveur internet est N, variable aléatoire, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = n) = a\,\dfrac{\lambda^{2n+1}}{2n+1}$, avec $\lambda \in]0,1[$. Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité (utiliser les séries entières). Calculer $\mathbb{P}(0 \leq N \leq 2)$ et la probabilité qu'il y ait eu plus d'une connexion dans la journée. Calculer l'espérance et la variance de N.

7. **(***)** Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ la tribu borélienne sur Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $[0,1]$.
   (a) On pose X la variable aléatoire telle que $X(\omega) = 1 - \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.
   (b) Répondre aux mêmes questions pour $Y(\omega) = -\ln(\omega)$.
   (c) On pose $Z(\omega) = \omega$ pour $\omega \in [0.5, 1]$ et $Z(\omega) = 0$ pour $\omega \in [0, 0.5[$. Déterminer la fonction de répartition de Z.

8. **(*)** On considère une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Calculer la médiane m de la loi, c'est-à-dire le nombre m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) = 0.5$.

9. **(*)** On suppose la variable aléatoire X à valeurs dans $[1, +\infty[$, telle que $\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = a/x^3$. Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Calculer l'espérance et la variance de X.

10. **(**)** On suppose que le temps d'attente (en mn) à une station service est une variable aléatoire continue T telle que $\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(T > t) = a(t^2 + 1)\exp(-2t)$. Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité continue. Calculer $\mathbb{P}(1 \leq T \leq 2)$ et la probabilité de mettre moins de 3 mn pour être servi. Déterminer la densité de probabilité de T, et calculer son espérance et sa variance.

11. **(**)** La charge de rupture d'un ascenseur est $500kg$. Un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a un poids représenté par une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 75kg$ et $\sigma = 16kg$. Quel est le nombre maximal de personnes que l'on peut autoriser à monter simultanément dans l'ascenseur pour que le risque de surcharge soit inférieur à 10^{-2}?

12. **(**)** La durée de vie d'un composant électrique peut être représenté par une v.a. continue X de densité de probabilité f définie par $f(x) = \begin{cases} kx(5-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

    (a) Calculer la valeur de k. Représenter graphiquement la fonction de répartition F_X de X

    (b) Calculer l'espérance et l'écart-type de X. Déterminer la médiane de X, c'est-à-dire le réel m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 0.5$ et $\mathbb{P}(X > m) < 0.5$.

13. **(**)** Soit une variable aléatoire X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, $-\omega \in \Omega$ et également que la loi de X est symétrique, c'est-à-dire que la loi de X est la même que celle de $-X$.

    (a) Montrer que $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$. Conclusion?

    (b) Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ alors $\mathbb{E}(X) = 0$.

Feuille n^o 5:

Fonctions de variables aléatoires

1. **(*)** Soit une variable X qui suit une loi $\mathcal{B}(2, 1/2)$. Déterminer la loi de $X - 1$, puis celle de $|X - 1|$.

2. **(*)** On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X et son espérance.

3. **(***)** Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère k un entier de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, et Y la variable aléatoire définie par : $Y(\omega) = X_1(\omega)$ si $X_2(\omega) \leq k$ et $Y(\omega) = X_2(\omega)$ si $X_2(\omega) > k$. Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité). Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1. Pour quelles valeurs de k cette espérance est-elle maximale?

4. **(**)** Soit une variable X qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la densité de probabilité de X^2.

5. **(*)** Pour 1 kg d'un certain alliage, la teneur en magnésium est une variable aléatoire X de densité de probabilité $f_X(x) = x/8 \quad$ si $0 \leq x \leq 4$ et 0 sinon.
   (a) Montrer que la loi de X est bien une loi de probabilité. Calculer l'espérance et la variance de X.
   (b) Chaque kg de cet alliage génère une perte de 100 euros si la teneur est inférieure à 2, aucun profit si la teneur est supérieure à 2 mais inférieure à 3, et un profit de 400 euros si la teneur est supérieure à 3. On considère 1 kg de cet alliage. D´eterminer la fonction de répartition du profit Y, et le profit moyen.

6. **(***)** Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. Soit X une variable de fonction de répartition F_X que l'on supposera strictement croissante et dérivable sur $\mathbf{R}$.
   (a) Montrer F_X est une fonction admettant une application réciproque sur $]0, 1[$, notée F_X^{-1}.
   (b) Démontrer que la loi de la variable $F_X^{-1}(U)$ est la même que celle de X.
   (c) A partir de la touche `RAND` d'une calculatrice, comment obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 3?
   (d) Même question si $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$. Quelle est alors l'espérance de $F_X^{-1}(U)$?

Feuille n^o 6:

Suites de variables aléatoires et théorèmes limites

1. **(**)** On sait que 3% des réservations de places d'avions ne sont pas honorées le jour du départ. Pour un avion de 400 places, combien de réservations au maximum peuvent-elles être acceptées par une compagnie aérienne pour que la probabilité que des personnes ayant réservé n'ait pas de place le jour du départ soit inférieure à 5%?

2. **(*)** Une pièce est telle que la probabilité d'obtenir Pile en un lancer est de p. On lance cette pièce 600 fois et on obtient pile 275 fois. Donner un intervalle de confiance à 95% pour p. La pièce est-elle biaisée?

3. **(**)** La charge de rupture d'un ascenseur est $500kg$. Un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a un poids représenté par une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 75kg$ et $\sigma = 16kg$. Quel est le nombre maximal de personnes que l'on peut autoriser à monter simultanément dans l'ascenseur pour que le risque de surcharge soit inférieur à 10^{-2}?

4. **(**)** On suppose 1000 piles produites par une même usine, telles que chaque pile a, indépendamment des autres, une probabilité 0.04 d'être défectueuse. On note N le nombre de piles défectueuses parmi les 1000.

   (a) Déterminer la loi de N, calculer son espérance m et sa variance σ^2, puis donner les formules permettant de calculer les probabilités $\mathbb{P}(N < 5)$ et $\mathbb{P}(N > 100)$.

   (b) On modélise autrement N par une loi de Poisson de même espérance que précédemment (donc m). Calculer alors la variance de N et donner les formules permettant de calculer les probabilités $\mathbb{P}(N < 5)$ et $\mathbb{P}(N > 100)$.

   (c) On modélise enfin N par une loi normale de moyenne m et de variance σ^2 (calculée précédemment). Donner les formules permettant de calculer les probabilités $\mathbb{P}(N < 5)$ et $\mathbb{P}(N > 100)$ à partir de la fonction de répartition F_Z d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

5. **(**)** 11 lapins ont été examinés pour contrôler le taux d'acide urique dans leur plasma. On a obtenu les résultats suivants (en mg/100 ml): $160, 168, 154, 156, 172, 163, 169, 175, 150, 167, 166$. Donner un intervalle de confiance au niveau 90% pour la moyenne de la population de laquelle l'échantillon a été extrait. Un expérimentateur voudrait estimer la vraie valeur du taux d'acide urique à 1% près avec un risque de 10%. Combien d'observations cela nécessite-t-il?

6. **(*)** On sait que 45% des électeurs d'un pays vote pour le candidat C. On interroge 200 personnes. Donner les formules permettant de calculer les probabilités a/ qu'exactement 90 personnes disent voter pour C; b/ que plus de 50% disent voter pour C. Dans le cas b/, donner une approximation de la probabilité en utilisant la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

7. **(**)** On effectue un sondage sur les intentions de vote d'une élection présidentielle. On supposera que chaque électeur à une probabilité p de voter pour le candidat C (p est inconnue). On interroge n personnes choisies au hasard, n étant supposé grand (de l'ordre du millier). On note $\widehat{p}_n$ la variable aléatoire qu'est la proportion d'électeurs parmi n désirant voter pour C.

(a) Donner la loi approchée de $\widehat{p}_n$.

(b) Que peut-on dire sur $\widehat{p}_n$ lorsque $n \to +\infty$?

(c) On suppose p connu. Déterminer la valeur minimale de n telle que la probabilité de l'événement
$\{\mid \widehat{p}_n - p \mid \leq 1\%\}$ soit supérieure à 95%?

(d) Répondre à la même question quand p est inconnu et étudier plus précisément les cas $\widehat{p}_n \sim 0.5$ et $\widehat{p}_n \sim 0$).

8. **(***)** La durée de vie d'un composant électrique peut être représenté par une variable aléatoire réelle X de densité de probabilité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} kx(5-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Calculer la valeur de k. Représenter graphiquement la fonction de répartition F_X de X

(b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$. Déterminer la médiane de X, c'est-à-dire le réel m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) = 0.5$.

(c) On considère n composants électriques dont les durées de vie $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ forment un n-échantillon de densité f. On forme un systéme électrique en branchant ces n composants en parallèle. Déterminer la fonction de répartition F_{T_n} de la durée de vie T_n de ce système (celui-ci ne fonctionne plus lorsque tous ses n composants sont grillés).

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer $p_n(\varepsilon) = \mathbb{P}(|T_n - 5| > \varepsilon)$. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} p_n(\varepsilon)$? Que peut-on en conclure pour T_n quand n devient grand?

(e) On note $M_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$. Déterminer $\mathbb{E}(M_n)$ et $V(M_n)$. On suppose n grand. En la justifiant, donner une loi approchée pour M_n. En déduire $\mathbb{P}(M_{100} \leq 2)$ et déterminer $a > 0$, minimal, tel que $\mathbb{P}(\mid M_{100} - \mathbb{E}(X) \mid \leq a) \geq 0.9$.

9. **(***)** On effectue une enquète, durant une épidémie de grippe, dans le but de connaître la proportion p de personnes présentant ensuite des complications graves. On observe un échantillon représentatif de 400 personnes et pour un tel échantillon 40 personnes ont présenté des complications.

- Donner un intervalle de confiance pour p au risque 5%.
- On désire que la valeur estimée $\hat{p}$ diffère de la proportion inconnue exacte p de moins de $0,005$ avec une probabilité égale à 95%. Quel sera l'effectif d'un tel échantillon?
- Quel devrait être le risque pour obtenir le même intervalle qu'à la question précédente en conservant l'effectif $n = 400$. Quelles conclusions peut-on en tirer?
- Si on dispose de 40 échantillons, combien en moyenne d'intervalles de confiance (au risque 5%) comprendront la valeur exacte inconnue p?