Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. PREMIÈRE ANNÉE 2021 – 2022

Test 1 de L1 Probabilités

Soit n données numériques $(x_1, \ldots, x_n)$. On suppose que la moyenne empirique de $(x_1, \ldots, x_n)$ vaut 1 et que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.

1. Que vaut sa variance empirique?
2. En déduire que $x_i = 1$ pour tout i. Quelle est la médiane de $(x_1, \ldots, x_n)$?
3. On considère $y_i = x_i + i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Quelle sont alors la moyenne empirique et la médiane de $(y_1, \ldots, y_n)$?

Proof.

1. On a $\overline{\sigma}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \big(\overline{x}\big)^2 = \frac{1}{n}\, n - 1^2 = 0$.
2. En utilisant la formule $\overline{\sigma}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \big(x_i - \overline{x}\big)^2$, on sait $\overline{\sigma}_x$ est une somme de carrés. Pour que $\overline{\sigma}_x$ puisse être nulle, il faut donc que chacun des carrés soit nul, c'est-à-dire que $\big(x_i - \overline{x}\big)^2 = 0$ pour tout i, ou encore $x_i = \overline{x} = 1$ pour tout i.
   Les données observées sont donc n fois 1. Trivialement, cela induit que la médiane est 1.
3. On a ainsi $y_i = i + 1$ pour $i = 1, \ldots, n$. D'où $\overline{y} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n = 1 + \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\,(n+3)$.
   Si n est impair, pour n réels distincts (ce qui est le cas ici), la médiane est le $(n+1)/2$ plus grand de ces réels. Ici cela correspond à $1 + (n+1)/2$ soit $\frac{1}{2}\,(n+3)$, soit la moyenne empirique.
   Si n est pair, la médiane sera $\frac{1}{2}\,(y_{(n/2)} + y_{(1+n/2)})$, d'où $\frac{1}{2}\big((1+n/2) + (2+n/2)\big) = \frac{1}{2}\,(n+3)$, soit encore la moyenne empirique.

□