TP1 Correction

Clément LAROCHE

17 décembre 2018

Exercice 1

Démonstration de la convergence de la série de terme $u_n = \frac{1}{n^2}$.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Le fait de retirer le premier terme de la série n'a pas d'incidence sur la convergence.
On établit le postulat suivant, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - n}$$

En effet, le dénominateur de la fraction à droite de l'inégalité est toujours plus petit que celui de gauche pour les valeurs de n considérées.
Si nous réussissons à prouver que la série de terme $u_n = \frac{1}{n^2-n}$ converge, nous réussirons alors à prouver la convergence de la série qui nous intéresse par test de comparaison.
Observons maintenant que la série de terme $u_n = \frac{1}{n^2-n}$ est télescopique. En effet pour $N > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2 - n} &= \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\
&= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}) \\
&= 1 - \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

On conclue donc que, quand $N \to +\infty$, la série $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2-n}$ tend vers 1. Elle converge donc. Cela implique que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ converge également.
De plus, notons que :

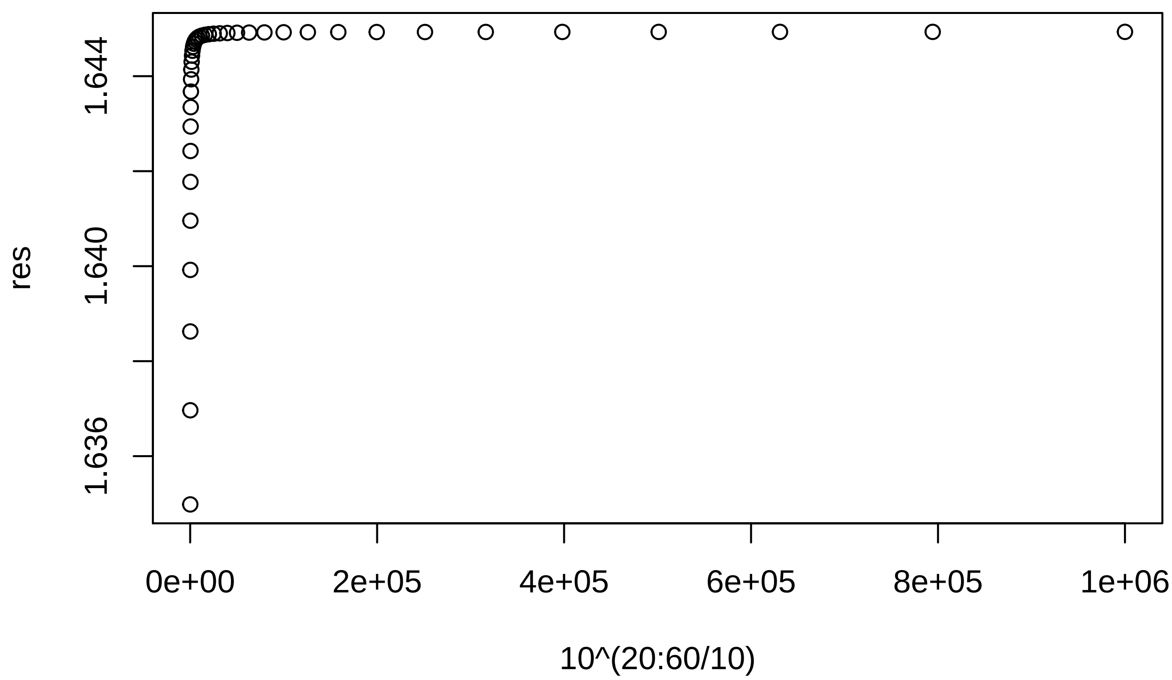
$$\begin{aligned}
&0 < \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2 - n} = 1 - \frac{1}{N} \text{ ce qui donne quand N tend vers l'infini} \\
&0 < \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < 1 \text{ en ajoutant le premier terme de la série, on trouve} \\
&1 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < 2
\end{aligned}$$

On passe maintenant au code :

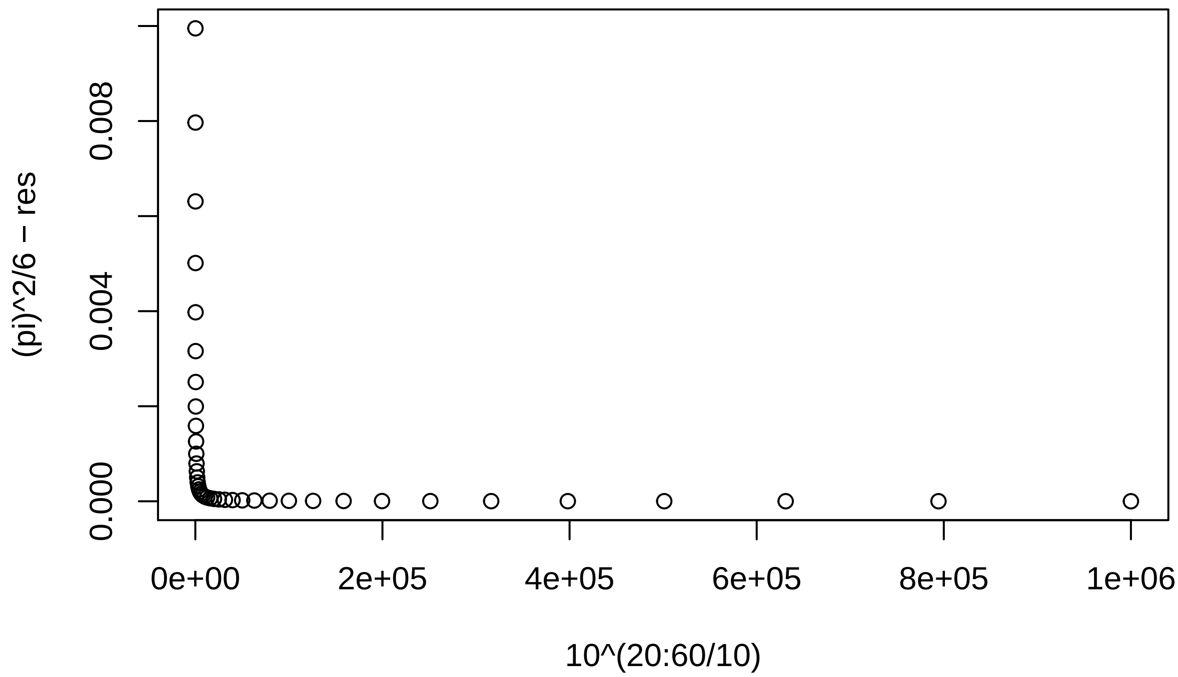
```
# Construction de I_n pour n = 10^6
INum <- rep(x = 1,10^6)
IDen <- (1:10^6)^2
In <- INum/IDen
# Obtention du résultat
sum(In)
```

```
## [1] 1.644933
```

```r
# On nettoie son espace de travail
rm(INum,IDen)

# Tracé pour les différentes valeurs de r
## construction avec une boucle des différentes valeurs de In
res <- c()
for(r in 20:60/10)
{
  n = 10^r
  INum <- rep(x = 1,n)
  IDen <- (1:n)^2
  In <- INum/IDen
  res <- c(res,sum(In))
}
## execution du tracé
plot(10^(20:60/10),res)
```




```r
# tracé du reste de cette série
plot(10^(20:60/10),(pi)^2/6 - res)
```



On se reporte au cours. On y trouve une formule pour la majoration de l'erreur d'approximation. En l'appliquant, on obtient :

$$
\begin{aligned}
|R_n| &\leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&\leq [-\frac{1}{x}]_n^{+\infty} \\
&\leq \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

L'ordre de grandeur de cette approximation est donc n^{-1}.

Exercice 2

```
## ce code est commenté à cause la fonction readline qui bloque la génération automatique des rapports d
## Code de l'exercice 2

## on efface les objets présents dans l'environnement
## de travail ils ne nous serviront plus

#rm(list = ls(all = TRUE))

## Création du vecteur x

# x <- readline("Entrez le point d'initialisation : ")
```

```
## attention avec la fonction readline
## le x créé est de type chaine de caractères, il faut donc le convertir en numérique

# x <- as.numeric(x)

# for (n in 1:10^5)
# {
#   x[n+1] <- 4*x[n]*(1-x[n])
# }
#

## tracé des points consécutifs

# plot(x[-length(x)],x[-1])
```

Exercice 3

Commencons par supposer que le nombre N n'est pas premier. Il admet donc des diviseurs autres que un et lui-même. Supposons par l'absurde qu'il n'admet aucun diviseur inférieur à $\sqrt{N}$ (qui n'est pas forcément un diviseur d entier si N n'est pas un carré). On écarte le cas où $N = 0$ ou 1. On observe le fait suivant :

$N = d \times q$ Par définition car d est un diviseur

$N = \sqrt{N} \times \sqrt{N}$ Par définition de la fonction racine.

Comme N est strictement supérieur à 1, il vient que :

$q = \frac{N}{d}$ et $\sqrt{N} = \frac{N}{\sqrt{N}}$

Or on sait que : $\sqrt{N} < d \implies \sqrt{N} > q$

Ce qui n'est pas possible car nous avions supposé par l'absurde que N n'admettait pas de diviseur inférieur à sa racine. On conclue donc que pour vérifier si un nombre est premier, il suffit de vérifier si les nombres inférieurs ou égaux à sa racine sont des diviseurs ou non.

```
# Code de l'exercice 3

# rm(list = ls(all = TRUE))
#
# x <- readline("Entrez un nombre entier : ")
# x <- as.numeric(x)

# res <- rep(x,floor(sqrt(x))-1)

# if(!0 %in% (res%%(2:floor(sqrt(x)))))
# {
#   print("Le nombre que vous avez rentré est premier.")
# }else
# {
#   print("Le nombre que vous avez rentré n'est pas premier.")
# }
```

Exercice 4

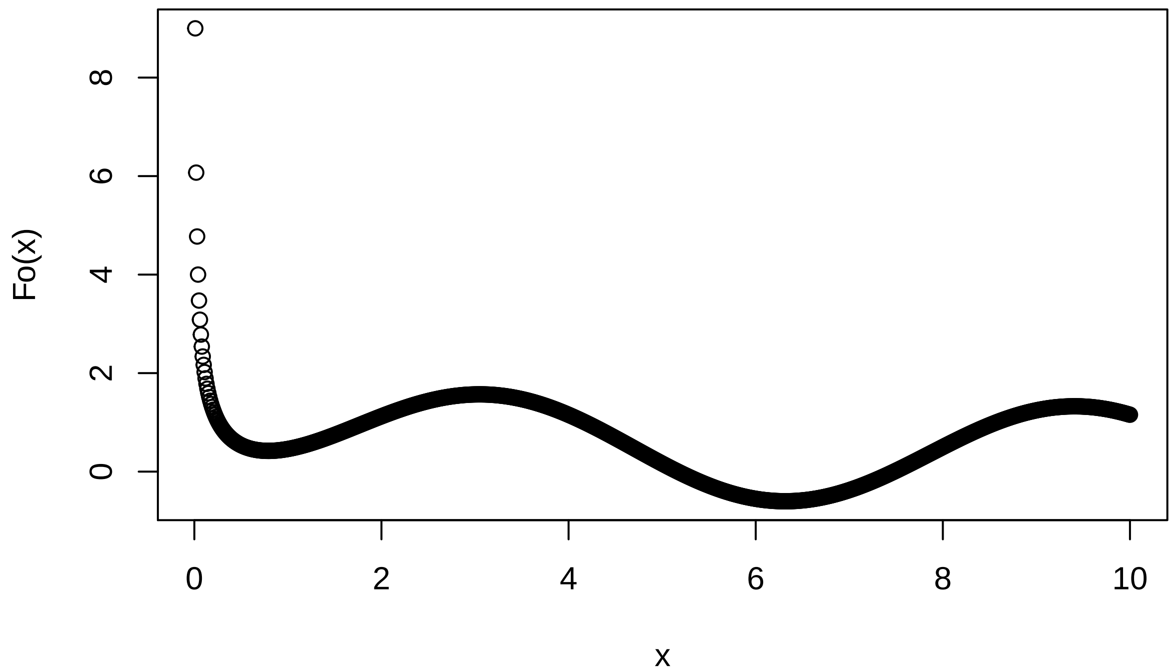
```r
# Code de l'exercice 4

# on crée le vecteur des nombres pairs entre 1 et 10^5
test <- (3:10^2)[3:10^2 %% 2 == 0]

# ATTENTION TEMPS D'EXECUTION LONG

# Goldbach <- function(x)
# {
#   p1 <- 2:(x-2)
#   p2 <- x-(2:(x-2))
#   pos1 <- c()
#   pos2 <- c()
#   for(i in 1:length(p1))
#   {
#     res1 <- rep(p1[i],floor(sqrt(p1[i]))-1)
#     res2 <- rep(p2[i],floor(sqrt(p2[i]))-1)
#     if(!0 %in% (res1%%(2:floor(sqrt(p1[i])))))
#     {
#       pos1 <- c(pos1, i)
#     }
#     if(!0 %in% (res2%%(2:floor(sqrt(p2[i])))))
#     {
#       pos2 <- c(pos2, i)
#     }
#   }
#   pos <- which(pos1 %in% pos2)[1]
#   return(c(p1[pos1[pos]],p2[pos1[pos]]))
# }
#
# apply(X = as.matrix(res),MARGIN = 1,FUN = "Goldbach")

# POUR LE DIMINUER ON PEUT PROCEDER AINSI


# fonction qui confirme si un nombre est premier ou pas
premieroupas <- function(x)
{
  res <- rep(x,floor(sqrt(x))-1)
  if(!0 %in% (res %% (2:floor(sqrt(x)))))
  {
    res <- TRUE
  }else
  {
    res <- FALSE
  }
  return(res)
}

# fonction qui code la conjecture de Goldbach en utilisant dans son code la fonction précédente
Goldbach <- function(x)
{
```

```r
  p1 <- 2:(x-2)
  p2 <- x-(2:(x-2))
  pos1 <- which(apply(X = as.matrix(p1),MARGIN = 1,FUN = "premieroupas") == TRUE)
  pos2 <- which(apply(X = as.matrix(p2),MARGIN = 1,FUN = "premieroupas") == TRUE)
  pos <- which(pos1 %in% pos2)[1]
  return(c(p1[pos1[pos]],p2[pos1[pos]]))
}

resfin <- apply(X = as.matrix(test),MARGIN = 1,FUN = "Goldbach")
# présentation des résultats
resfin <- as.data.frame(resfin)
colnames(resfin) <- as.character(2+2*1:ncol(resfin))
row.names(resfin) <- c("1er terme de la somme","2ème terme de la somme")
resfin
```

```
##                        4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38
## 1er terme de la somme  2 3 3  3  5  3  3  5  3  3  5  3  5  7  3  3  5  7
## 2ème terme de la somme 2 3 5  7  7 11 13 13 17 19 19 23 23 23 29 31 31 31
##                        40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72
## 1er terme de la somme   3  5  3  3  5  3  5  7  3  5  7  3  3  5  7  3  5
## 2ème terme de la somme 37 37 41 43 43 47 47 47 53 53 53 59 61 61 61 67 67
##                        74 76 78 80 82 84 86 88 90 92 94 96 98 100
## 1er terme de la somme   3  3  5  7  3  5  3  5  7  3  5  7 19   3
## 2ème terme de la somme 71 73 73 73 79 79 83 83 83 89 89 89 79  97
```

Exercice 5

```r
Fo <- function(x)
{
  res <- 1/sqrt(x)-cos(x)
  return(res)
}

pas <- 0.01
x <- seq(from = 0.01,to = 10,by = pas)
plot(x,Fo(x))
```



On va trouver deux fonctions qui encadrent F pour pouvoir mener une étude de fonction. On remarque que, $\forall x \in]0, 10]$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} - \cos(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

Etudions donc la borne inférieur que l'on notera $g(x)$. On a que :
- $g(x)$ est continue sur $]0, 10]$
- $g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$, elle strictement négative sur $]0, 10]$, donc g est strictement décroissante sur cet intervalle
- $g(0^+) = +\infty$, $g(10) = \frac{1}{\sqrt{10}} < 0$ et $g(1) = 0$

On en déduit de cette étude que F est positive sur $]0, 1]$, il n'y a donc pas de valeurs x_0 sur cet intervalle. En revanche, il y en a peut être sur l'intervalle $[1, 10]$. On travaillera à partir de maintenant sur cet intervalle. Reprenons maintenant l'équation $F(x) = 0$. Celle ci implique l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \cos(x)$$

Or $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est strictement positive sur l'intervalle d'étude (pour rappel $[1, 10]$). On sait que la fonction cosinus es positive sur les intervalles du type $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On sait donc que les 0 de la fonction F se trouvent sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \cap [1, 10]$ qui n'est autre que $[1, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$.
Etudions F' sur $[[1, \frac{\pi}{2}]]$. Calculons la formule de F' :

$$F'(x) = \sin(x) - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

On a donc que sur cet intervalle :

$$\sin(1) - \frac{1}{2} \leq F'(x) \leq 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^{-\frac{3}{2}}$$

On sait donc que F' est strictement positive sur cet intervalle (utiliser R comme calculatrice pour calculer $\sin(1)$). Donc F est strictement sur cet intervalle. On calcule maintenant $F(1)$.

```r
Fo(1)
```

```
## [1] 0.4596977
```

On conclue qu'il n'y a pas de solutions x_0 sur l'intervalle $[1, \frac{\pi}{2}]$.
Tournons nous maintenant vers le dernier intervalle restant : $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$. On a l'inégalité suivante :

$$-1 - \frac{1}{2}(\frac{3\pi}{2})^{-\frac{3}{2}} < F'(x) < 1 - -\frac{1}{2}(\frac{5\pi}{2})^{-\frac{3}{2}}$$

La borne inférieure est négative et la borne supérieur est positive. F' est continue sur cet intervalle, il existe donc un point ou F' s'annule. Cherchons maintenant les 0 de F'. On a l'implication suivante :

$$F'(x) = 0 \implies \sin(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Or $\frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$ sur notre intervalle d'étude. Et $\sin(x) > 0$ uniquement sur $[2\pi, \frac{5\pi}{2}]$. Donc les potentiels 0 de F' se trouvent sur cet intervalle. Calculons maintenant la dérivé seconde de F sur cet intervalle. On a :

$$F''(x) = \cos(x) + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

Sur l'intervalle $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, F'' est strictement positive. Donc F' est strictement croissante. Et on a $F'(2\pi) < 0$ et $F'(\frac{5\pi}{2}) > 0$. Cela nous assure qu'il existe un seul 0 de la fonction F' sur l'intervalle considéré. Cela implique également que F' est négative sur un certain intervalle $[\frac{3\pi}{2}, z]$ et positive sur $[z, \frac{5\pi}{2}]$. On peut donc en déduire les variations de F. Regardons quelques valeurs numériques dès à présent, on a :

```r
Fo(3/2*pi)
```

```
## [1] 0.4606589
```

```r
Fo(2*pi)
```

```
## [1] -0.6010577
```

```r
Fo(5/2*pi)
```

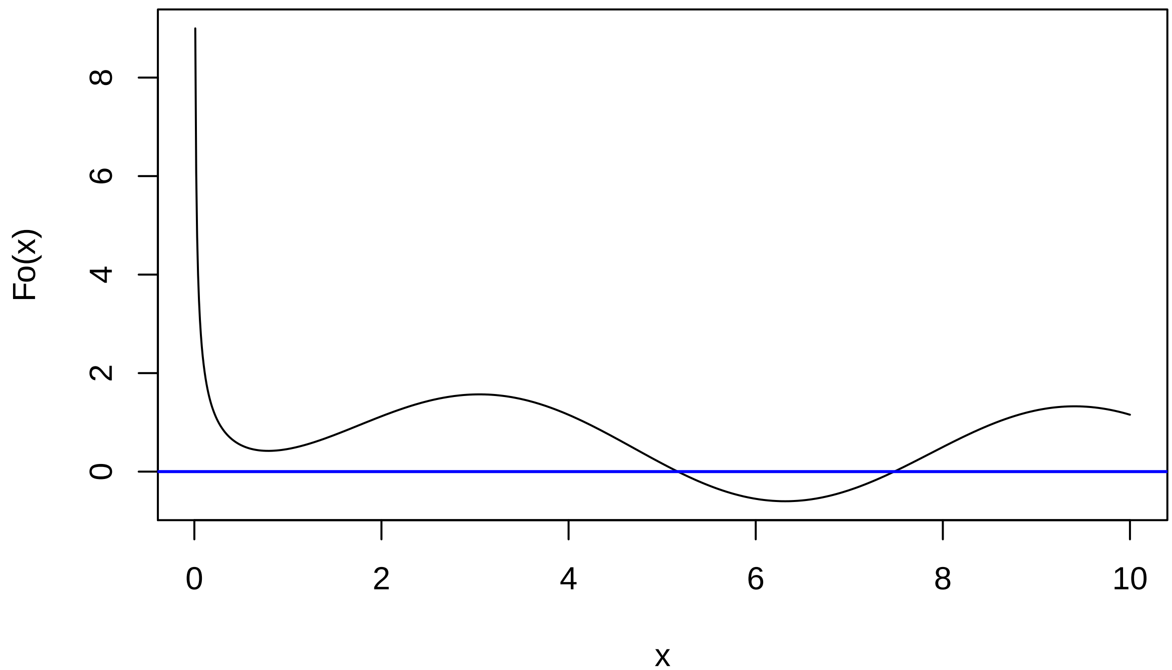
```
## [1] 0.3568248
```

On en déduit que F admet bien deux solutions x_0 telles que $F(x_0) = 0$ sur l'intervalle $]0, 10]$ (on peut même être plus précis que ça).
Pour chercher une approximation de ces valeurs, on procède ainsi :

```r
pas <- 0.01
x <- seq(from = 0.01,to = 10,by = pas)
delta <- 10^(-2)
x[which(abs(Fo(x)) < delta)]
```

```
## [1] 5.16 5.17 7.47 7.48 7.49
```

```r
# graphiquement cette méthode consiste à récupérer les abscisses des points de la courbe de Fo qui sont
{
  plot(x,Fo(x),type="l")
  abline(h = 10^(-2),col = "blue")
  abline(h = -10^(-2),col = "blue")
}
```



On obtient plusieurs valeurs pour l'axe des abscisses à cause la précision de cette méthode. On peut n'obtenir aucune valeur si on prend une valeur de `delta` trop petite. On peut améliorer l'approximation en augmentant le nombre de points dans dans le vecteur `x` ce qui revient à prendre un pas plus petit. Cependant, notez qu'au bout d'un moment, on sera de nouveau heurté au problème de la précision de la machine.