Correction TD4

Clément LAROCHE

3 janvier 2019

Suites et limites de suites

Première question

Déterminons la limite de (u_n).
Commencons l'existence de cette limite. Pour cela, on utilise les indications de l'énoncé. (u_n) est bien définie par récurrence. Montrons qu'elle est bornée. On remarque que f est minorée par 1. Ensuite on se rendra compte grâce à une rapide étude de fonction que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (où elle est définie). Donc f est bornée. Donc (u_n) est bornée.
Ensuite on va montrer que sur l'intervalle $I = [1, 2]$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'intervalle image $f(I)$ est compris dans I ainsi que $\sup_{x\in I} |f'(x)| \leq 1$. Notons tout d'abord que, $u_0 \in I$ et que I est un fermé de $\mathbb{R}$ ce qui en fait donc un compact. Ensuite, on calcule la dérivée première de f, on obtient que :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

Cette fonction est bien continue sur I, ce qui fait que f est bien de classe $\mathcal{C}^1$. Regardons maintenant l'intervalle image de I. On a d'après le calcul ci dessus que f' est négative sur I. Donc f est strictement décroissante sur I. On calcule maintenant f aux bornes de I, on a que : $f(1) = \frac{3}{2}$ et $f(2) = \frac{4}{3}$. Donc $f(I) \in I$. Finalement, on observera que sur I :

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

Ce qui est strictement positif sur I. Donc f' est strictement croissante sur cet intervalle. De plus :

$$|f'(1)| = \frac{1}{4}$$

et

$$|f'(2)| = \frac{1}{9}$$

Donc $\sup_{x\in I} |f'(x)| \leq 1$. On conclut donc que (u_n) admet une limite l. On détermine maintenant cette limite. Remarquez que l'on peut directement résoudre $f(l) = l$ qui est donné dans l'énoncé. Comment retrouve-t-on cette formule du point fixe ? Grâce à l'unicité de la limite. En effet, les suites (u_n) et (u_{n+1}) admettent la même limite : l. Ce qui donne donc que :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \implies \lim u_{n+1} = \frac{l+2}{l+1}$$

$$\text{Or : } \lim u_{n+1} = l \quad \text{donc on retrouve que}$$

$$l = \frac{l+2}{l+1} \text{ qui est bien le point fixe de } f$$

On résoud maintenant cette équation sur l'intervalle I :

$$l = \frac{l+2}{l+1} \iff l - \frac{l+2}{l+1} = 0$$
$$\iff \frac{l^2 + l - l - 2}{l(l+1)} = 0$$
$$\iff \frac{l^2 - 2}{l(l+1)} = 0$$
$$\iff l = \sqrt{2}$$

C'est en effet la seule solution sur I tel que l'on a défini I.

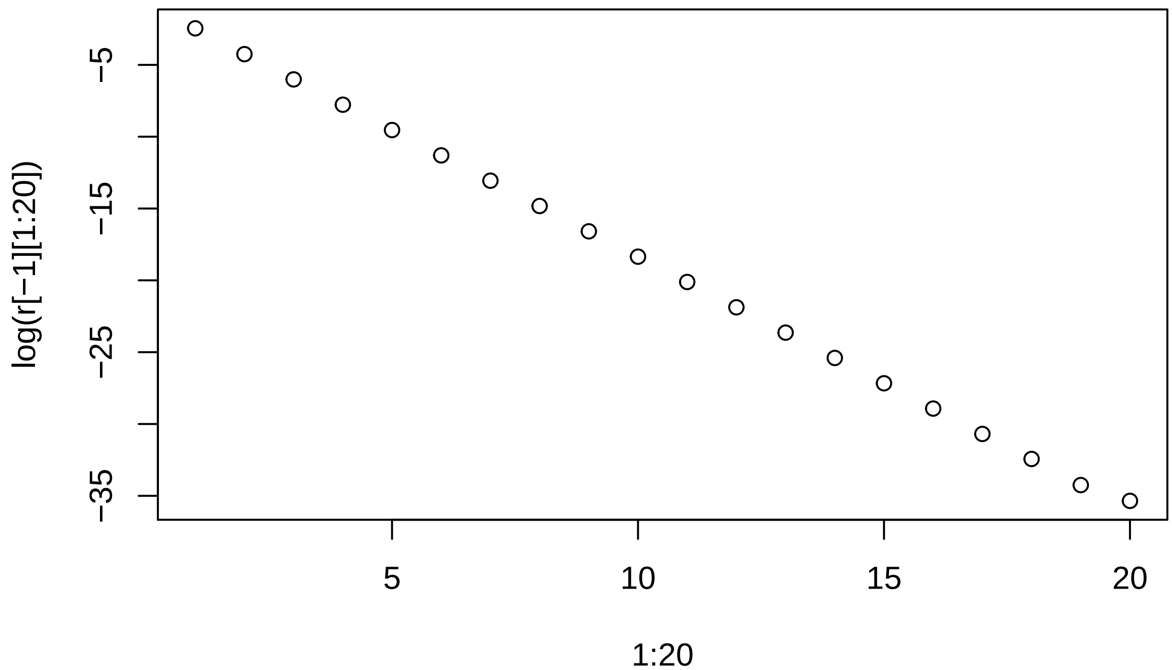
```
# on choisit jusqu'à quel n on exécute la suite
n <- 10^3
# on initialise à u0
u <- 1
# on crée le vecteur contenant tous les termes de la suite
for(i in 1:n)
{
  u <- c(u,(u[i]+2)/(u[i]+1))
}
# on crée le vecteur rn
r <- abs(u-sqrt(2))
# on répond aux questions à partir de quel n etc...
pos <- min(which(r < 10^(-3)))
pos
```

```
## [1] 5
```

```
pos <- min(which(r < 10^(-10)))
pos
```

```
## [1] 14
```

```
# on trace le graphe demandé
plot(1:20,log(r[-1][1:20])) # je ne trace que les 20 premières coordonnées
```



On peut en conclue que la suite (u_n) tend à une vitesse exponentielle vers la limite $\sqrt{2}$.

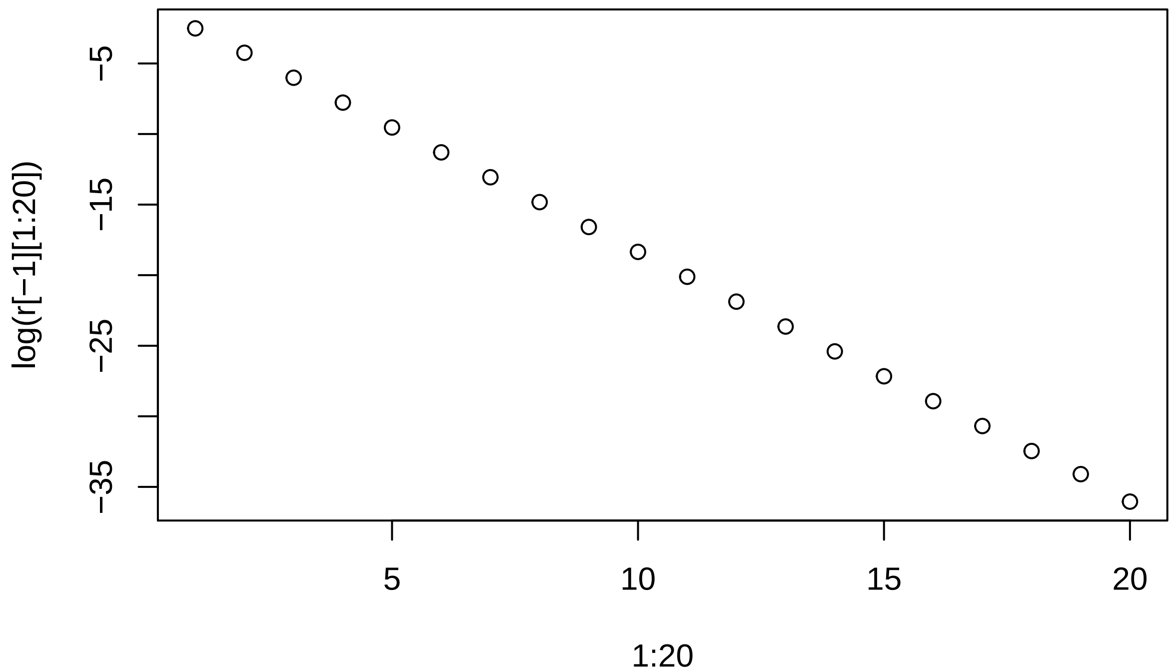
```
# on choisit jusqu'à quel n on exécute la suite
n <- 10^3
# on initialise à u0
u <- 2
# on crée le vecteur contenant tous les termes de la suite
for(i in 1:n)
{
  u <- c(u,(u[i]+2)/(u[i]+1))
}
# on crée le vecteur rn
r <- abs(u-sqrt(2))
# on répond aux questions à partir de quel n etc...
pos <- min(which(r < 10^(-3)))
pos
```

```
## [1] 5
```

```
pos <- min(which(r < 10^(-10)))
pos
```

```
## [1] 14
```

```
# on trace le graphe demandé
plot(1:20,log(r[-1][1:20])) # je ne trace que les 20 premières coordonnées
```



On voit que l'initialisation à $u_0 = 2$ n'a rien changé.

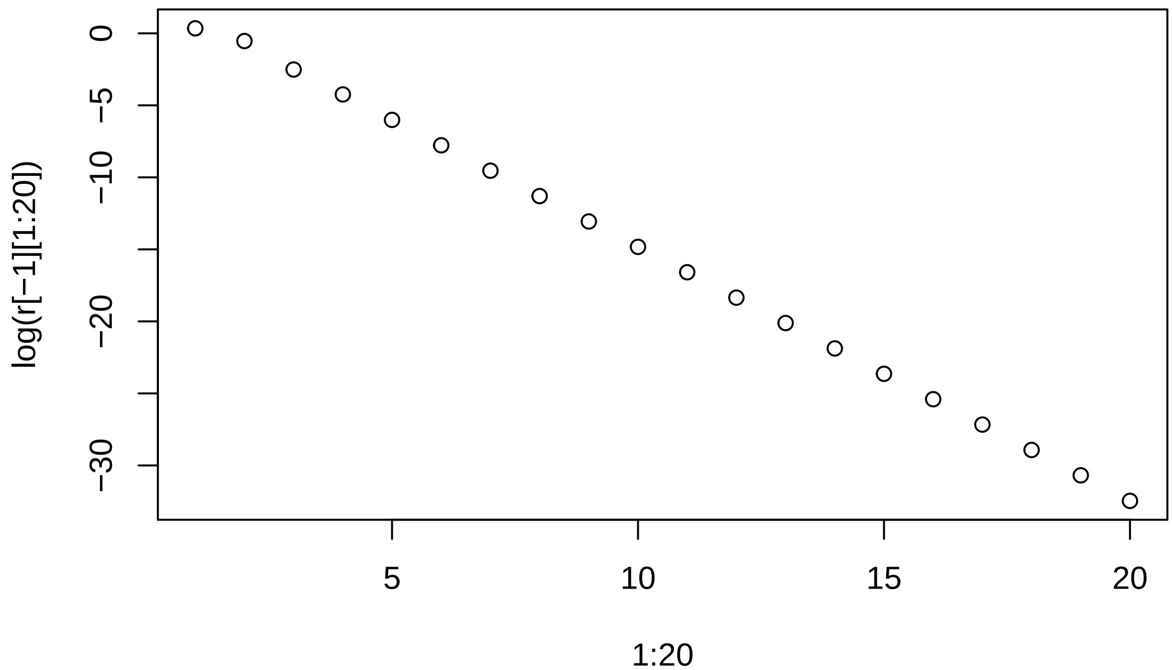
```
# on choisit jusqu'à quel n on exécute la suite
n <- 10^3
# on initialise à u0
u <- -2
# on crée le vecteur contenant tous les termes de la suite
for(i in 1:n)
{
  u <- c(u,(u[i]+2)/(u[i]+1))
}
# on crée le vecteur rn
r <- abs(u-sqrt(2))
# on répond aux questions à partir de quel n etc...
pos <- min(which(r < 10^(-3)))
pos
```

```
## [1] 7
```

```
pos <- min(which(r < 10^(-10)))
pos
```

```
## [1] 16
```

```
# on trace le graphe demandé
plot(1:20,log(r[-1][1:20])) # je ne trace que les 20 premières coordonnées
```



On voit que l'initialisation à $u_0 = -2$ n'a pas changé le résultat.

Montrons que la série (v_n) définie par $u_n = \sqrt{2} + \frac{1}{v_n - \frac{\sqrt{2}}{4}}$ est géométrique. On a que :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_n - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{4 + \sqrt{2}u_n - 2}{4(u_n - \sqrt{2})} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}u_n}{4(u_n - \sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{u_n + \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Une fois v_n sous cette forme, on peut en déduire que :

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{u_{n+1}+\sqrt{2}}{u_{n+1}-\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\frac{u_n+2}{u_n+1}+\sqrt{2}}{\frac{u_n+2}{u_n+1}-\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{u_n+2+\sqrt{2}u_n+\sqrt{2}}{u_n+2-\sqrt{2}u_n-\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{u_n+\sqrt{2}+\sqrt{2}(u_n+\sqrt{2})}{u_n-\sqrt{2}-\sqrt{2}(u_n-\sqrt{2})}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})(u_n+\sqrt{2})}{4(1-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2})}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-(1+\sqrt{2})^2\right)\frac{u_n+\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}\\
&= -(1+\sqrt{2})^2 v_n
\end{aligned}
$$

D'après le calcul précédent.
On vient donc de montrer que v_n est une suite géométrique de raison $-(1+\sqrt{2})^2$. En découle que la forme générale de v_n s'écrit :

$$v_n = v_0(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}$$

Avec : $v_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[1+\frac{2\sqrt{2}}{u_0-\sqrt{2}}\right]$ La formule de u_n s'écrit donc :

$$
\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{2}+\frac{1}{v_n-\frac{\sqrt{2}}{4}}\\
&= \sqrt{2}+\frac{1}{(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}\frac{\sqrt{2}}{4}[1+\frac{2\sqrt{2}}{u_0-\sqrt{2}}]-\frac{\sqrt{2}}{4}}\\
&= \sqrt{2}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}\left[(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}[1+\frac{2\sqrt{2}}{u_0-\sqrt{2}}]-1\right]}\\
&= \sqrt{2}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}\left[(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}[\frac{u_0+\sqrt{2}}{u_0-\sqrt{2}}]-\frac{u_0-\sqrt{2}}{u_0-\sqrt{2}}\right]}\\
&= \sqrt{2}+\frac{4(u_0-\sqrt{2})}{(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2}u_0+2)+(2-\sqrt{2}u_0)}
\end{aligned}
$$

Ce qu'il fallait démontrer.
Ensuite, on en déduit que u_n n'est pas définie pour les valeurs de u_0 qui vérifient :

$$
\begin{aligned}
(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2}u_0+2)+(2-\sqrt{2}u_0)=0 &\iff (\sqrt{2}(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}-\sqrt{2})u_0 = -2-2(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}\\
&\iff u_0 = \frac{-2-2(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}}{-\sqrt{2}-\sqrt{2}(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}}\\
&\iff u_0 = \sqrt{2}\frac{1+(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}}{1-(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}}
\end{aligned}
$$

r_n est la différence entre u_n et sa limite $\sqrt{2}$, sa formule est donc :

$$r_n = \frac{4(u_0-\sqrt{2})}{(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2}u_0+2)+(2-\sqrt{2}u_0)}$$

On voit donc que sa décroissance est bien exponentielle.

Deuxième question

Pour répondre à la question des limites possibles de (w_n), on s'intéresse d'abord à l'existence d'une telle limite. Pour cela, on se sert à nouveau des conditions décrites dans l'énoncé. On pose f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}$$

On a que $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Calculons la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

Regardons donc les intervalles tels que :

$$\begin{aligned} -1 \leq f'(x) \leq 1 &\iff -1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \leq 1 \\ &\iff -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{3}{2} \\ &\iff x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } x \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

On obtient donc les intevalles $[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty[$ et $[-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}]$. On prendra $w_0 = 1$ qui est bien dans l'intervalle $[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty[$. Regardons l'intervalle image de ce dernier. On a d'après la formule de la dérivé de f que la fonction est décroissante de

$$\sqrt{\frac{2}{3}}$$

à $\sqrt{2}$, puis croissante à partir de cette valeur. Calculons donc $f(\sqrt{\frac{2}{3}})$ et $f(\sqrt{2})$. On obtient alors :

$$f(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{4}{\sqrt{6}} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

et

$$f(\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

On a donc bien, en prenant $I = [\sqrt{\frac{2}{3}}, c]$ avec c grand (ce qui permet de définir un compact) que $f(I) \in I$. On pourrait se demander si $f(c) \geq c$ et que l'argument précédent ne marche pas (on n'aurait alors pas que $f(I) \in I$). Mais quand on regarde la dérivé de f, on se rend compte que cette fonction croît moins vite que $\frac{1}{2}x$, donc moins vite que la fonction qui à x associe x. On a donc pour des valeurs élevées que $f(c) \leq c$. L'argument est donc valable.
Nous venons donc de montrer que la suite admet une limite, limite qui vérifie :

$$\begin{aligned} l = \frac{1}{2}l + \frac{1}{l} &\iff \frac{2 - l^2}{2l} = 0 \\ &\iff l = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Qui est la seule limite possible dans I.

On passe à la partie code.

```r
# initialisation de la suite
w <- 1
# calcul des 1000 premiers termes de la suite
n <- 10^3
for(i in 1:n)
```

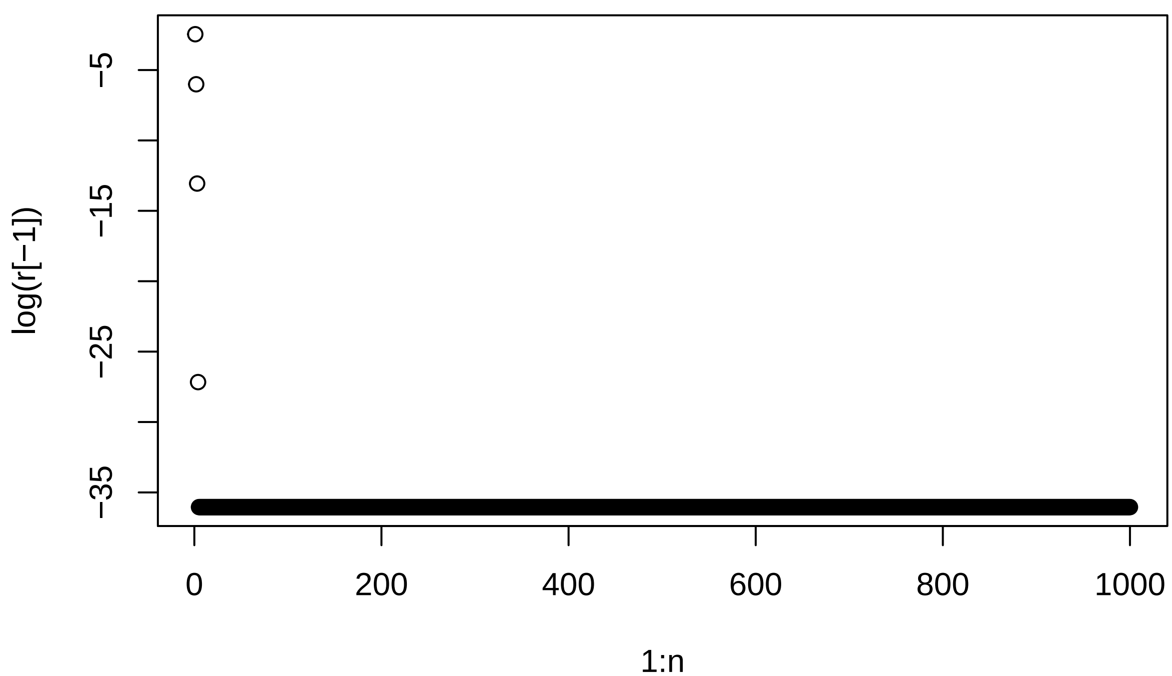
```
{
  w[i+1] <- 0.5*w[i]+1/w[i]
}
# on définit le reste de cette série
r <- abs(w-sqrt(2))
# on répond aux questions à partir de quel n etc...
pos <- min(which(r < 10^(-3)))
pos
```

```
## [1] 4
```

```
pos <- min(which(r < 10^(-10)))
pos
```

```
## [1] 5
```

```
# on trace le graphe demandé
plot(1:n,log(r[-1]))
```



On voit que cette série converge beaucoup plus vite que la série (u_n) de la première question. Vérifions si c'est le cas pour différentes initialisations (i.e. pour différentes valeurs de u_0).

```
# initialisation de la suite
w <- 2
# calcul des 1000 premiers termes de la suite
n <- 10^3
for(i in 1:n)
{
```

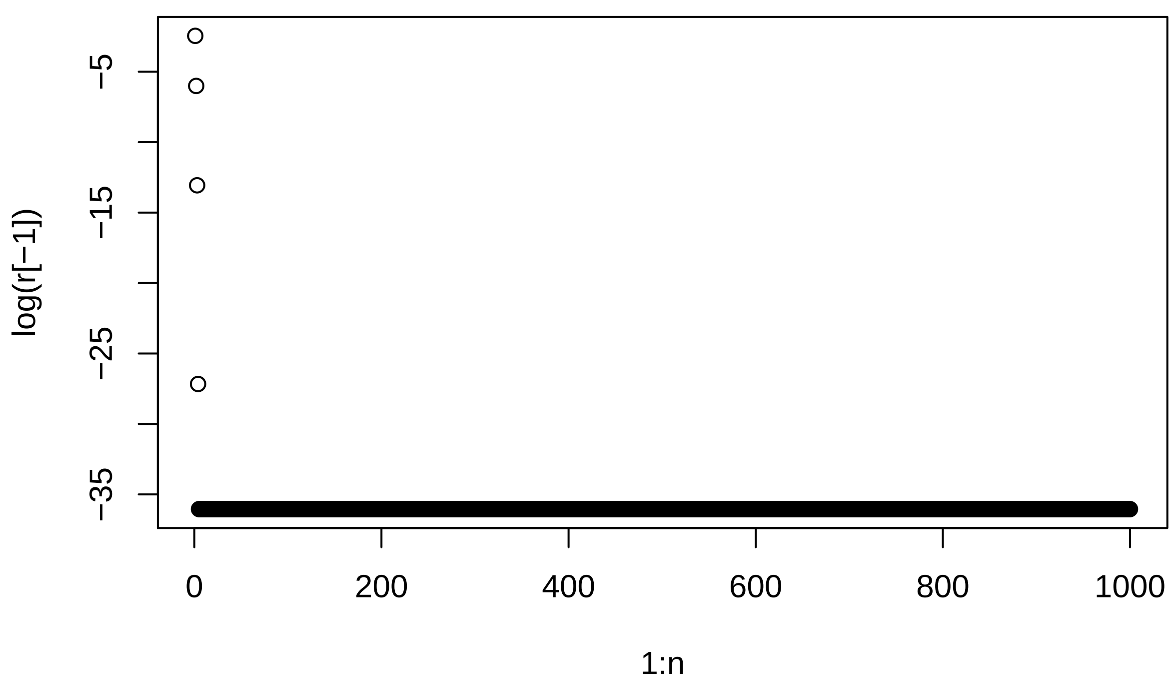
```r
  w[i+1] <- 0.5*w[i]+1/w[i]
}
# on définit le reste de cette série
r <- abs(w-sqrt(2))
# on répond aux questions à partir de quel n etc...
pos <- min(which(r < 10^(-3)))
pos
```

```
## [1] 4
```

```r
pos <- min(which(r < 10^(-10)))
pos
```

```
## [1] 5
```

```r
# on trace le graphe demandé
plot(1:n,log(r[-1]))
```




```r
# initialisation de la suite
w <- -1
# calcul des 1000 premiers termes de la suite
n <- 10^3
for(i in 1:n)
{
  w[i+1] <- 0.5*w[i]+1/w[i]
}
# on définit le reste de cette série
```

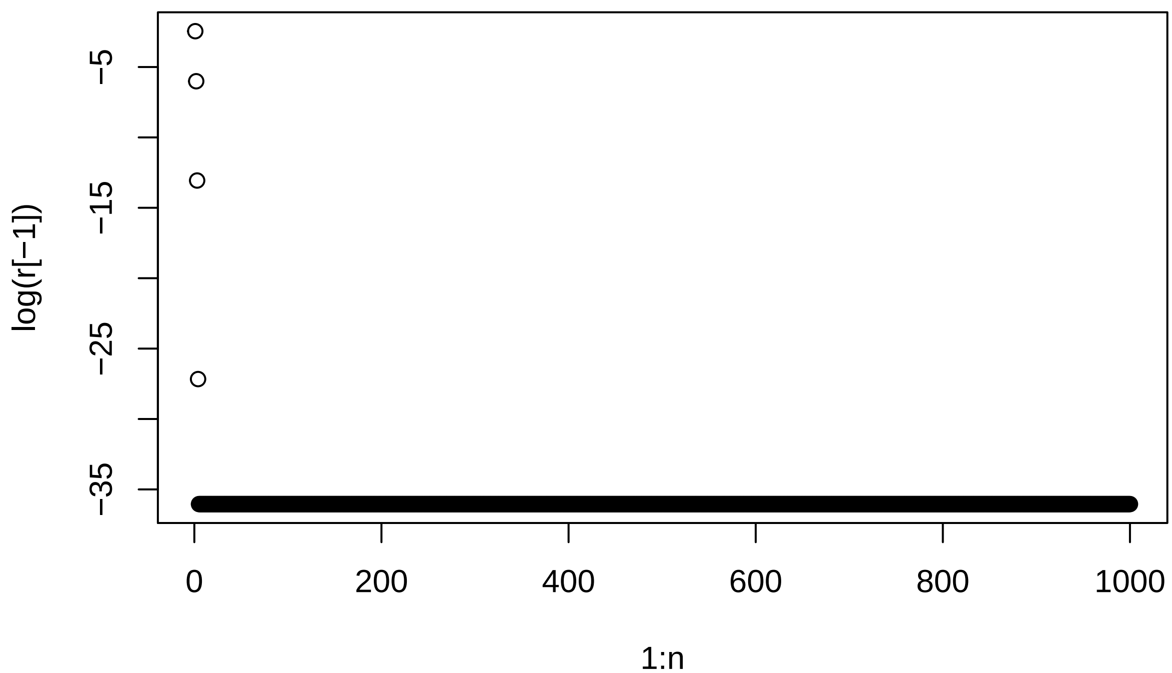
```r
r <- abs(w+sqrt(2))
# on répond aux questions à partir de quel n etc...
pos <- min(which(r < 10^(-3)))
pos
```

```
## [1] 4
```

```r
pos <- min(which(r < 10^(-10)))
pos
```

```
## [1] 5
```

```r
# on trace le graphe demandé
plot(1:n,log(r[-1]))
```



On voit ici que l'initialisation de (w_n) à -1 fait converger la suite à la même vitesse que pour les autres initialisations, mais la limite n'est plus $\sqrt{2}$ mais $-\sqrt{2}$.

On suppose que $w_n \in [1,2]$. Montrons que w_{n+1} appartient également à $[1,2]$. On a que :

$$1 \leq w_n \leq 2 \iff \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}w_n \leq 1$$

et

$$1 \leq w_n \leq 2 \iff \frac{1}{2} \leq \frac{1}{w_n} \leq 1$$

donc

$$1 \leq \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{w_n} \leq 2 \iff 1 \leq w_{n+1} \leq 2$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Ensuite, on suppose que $w_0 \in [1,2]$. Cela implique que tous les termes de (w_n) seront également dans cette intervalle d'après ce que nous avons montrer précédemment. Remarquons ensuite que $|w_{n+1} - \sqrt{2}|$ n'est autre que $|f(w_n) - f(\sqrt{2})|$. On constate les trois points suivants :

- f est continue sur l'intervalle $[1,2]$.
- f est dérivable sur l'intervalle $]1,2[$
- il existe bien un réel M tel que pour tout élément x de $]1,2[$ $|f'(x)| \leq M$

Pour le troisième point, on le montre de la manière suivante :

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

f'' est donc positive sur $]1,2[$. Donc f' est croissante sur $]1,2[$. De plus, $f'(1) = -\frac{1}{2}$ et $f'(2) = \frac{1}{4}$. Donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur $[1,2]$. Ces trois conditions vérifiées, on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis, on obtient donc :

$$|\frac{f(a) - f(b)}{a - b}| \leq \frac{1}{2}$$

Pour a et b appartenant à $[1,2]$. C'est donc notamment vrai pour w_n qui pour tout n appartient à $[1,2]$ et $\sqrt{2}$. On obtient donc :

$$|\frac{f(w_n) - f(\sqrt{2})}{w_n - \sqrt{2}}| \leq \frac{1}{2} \implies |w_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|w_n - \sqrt{2}|$$

Ce qu'il fallait démontrer. Ceci est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Regardons maintenant ce qu'implique les différents résultats obtenus. On a que $|w_1 - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|w_0 - \sqrt{2}|$,$|w_2 - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|w_1 - \sqrt{2}|$, $\ldots$,$|w_{n-1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|w_{n-2} - \sqrt{2}|$,$|w_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|w_{n-1} - \sqrt{2}|$. Donc en remplaçant chaque termme à droite de l'inégalité, on obtient finalement que :

$$|w_n - \sqrt{2}| \leq (\frac{1}{2})^n |w_0 - \sqrt{2}| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$$

Avec cette information, on sait que (w_n) converge au moins aussi vite qu'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Sommes partielles

Pour répondre à la première question posée, nous allons définir les deux quantités suivantes :

$$A_n = (\Pi_{j=1}^{n}(\frac{1}{2} + 1 - j))\frac{1}{n!}$$

et

$$B_n = (-1)^{n+1}\frac{(2n-2)!}{2n4^{n-1}((n-1)!)^2}$$

Nous allons montrer par récurrence que ces deux quantités sont égales. On commence au rang initial, on a que :

$$A_1 = \frac{1}{2}$$

et

$$B_1 = \frac{1}{2}$$

Donc l'initialisation de la récurrence est vérifiée. On suppose que $A_n = B_n$ jusqu'au rang n. Nous allons essayer de montrer que $A_{n+1} = B_{n+1}$. On procède ainsi :

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= (\Pi_{j=1}^{n+1}(\frac{1}{2}+1-j))\frac{1}{(n+1)!} \\
&= \frac{(\frac{1}{2}+1-n-1)}{n+1}A_n \\
&= \frac{(\frac{1}{2}-n)}{n+1}B_n \quad \text{D'après ce que nous avons supposé ci-dessus.} \\
&= \frac{(\frac{1}{2}-n)}{n+1}(-1)^{n+1}\frac{(2n-2)!}{2n4^{n-1}((n-1)!)^2} \\
&= (-1)^{n+2}\frac{(n-\frac{1}{2})(2n-2)!}{(n+1)2n4^{n-1}((n-1)!)^2} \\
&= (-1)^{n+2}\frac{(2n-1)!}{2(n+1)2n4^{n-1}((n-1)!)^2} \\
&= (-1)^{n+2}\frac{(2n)!}{4n(n+1)2n4^{n-1}((n-1)!)^2} \\
&= (-1)^{n+2}\frac{(2(n+1)-2)!}{2(n+1)4^n(n!)^2} \\
&= B_{n+1}
\end{aligned}$$

On a donc montré par récurrence l'égalité entre les deux formules demandées.

Première question

```r
# pour n =5
n <- 5
# creation du vecteur des j
j <- 1:n
# on initialise a x=1
x <- 1
# creation du vecteur permet d eviter les boucles
res <- rep(0,n)
# calcul des termes de la somme
res <- (-1)^(j+1)*gamma(2*j-1)/(2*j*4^(j-1)*gamma(j)^2)*x^j
# on effectue une somme cumulative
res <- cumsum(res)
# on oublie pas le 1 de la formule
res <- 1+res
res
```

```
## [1] 1.500000 1.375000 1.437500 1.398438 1.425781
```

```r
# meme chose pour n = 10
n <- 10
# creation du vecteur des j
j <- 1:n
# on initialise a x=1
x <- 1
# creation du vecteur permet d eviter les boucles
res <- rep(0,n)
# calcul des termes de la somme
```

```r
res <- (-1)^(j+1)*gamma(2*j-1)/(2*j*4^(j-1)*gamma(j)^2)*x^j
# on effectue une somme cumulative
res <- cumsum(res)
# on oublie pas le 1 de la formule
res <- 1+res
res
```

```
##  [1] 1.500000 1.375000 1.437500 1.398438 1.425781 1.405273 1.421387
##  [8] 1.408295 1.419205 1.409931
```

```r
# # meme chose pour n = 100
# n <- 100
# # creation du vecteur des j
# j <- 1:n
# # on initialise a x=1
# x <- 1
# # creation du vecteur permet d eviter les boucles
# res <- rep(0,n)
# # calcul des termes de la somme
# res <- (-1)^(j+1)*gamma(2*j-1)/(2*j*4^(j-1)*gamma(j)^2)*x^j
# # on effectue une somme cumulative
# res <- cumsum(res)
# # on oublie pas le 1 de la formule
# res <- 1+res
# res
```

Pour $n = 100$, la machine souffre un peu (surtout la mienne) car factorielle 100 prend des valeurs démesurées et l'ordinateur doit effectuer des opérations avec.

On pose donc que $a_k = (-1)^{k+1}\frac{(2k-2)!}{2k4^{k-1}((k-1)!)^2}x^k$. On a donc bien une relation entre a_{k+1} et a_k que l'on peut expliciter avec le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= (-1)\frac{2k^2(2k-1)}{4(k+1)k^2}x \\ &= -\frac{2k-1}{2(k+1)}x \\ &= \frac{1-2k}{2(k+1)}x\end{aligned}$$

On a donc que :

$$a_{k+1} = \frac{1-2k}{2(k+1)}xa_k$$

On rappelle que le terme initial a_1 vaut $\frac{x}{2}$. Nous avons donc une nouvelle manière de programmer la série. On remarque que cette manière ne fait plus intervenir de factorielle. Il y a peut-être une chance que l'on ne rencontre plus de problème pour la calculer pour des valeurs de n élevées. Essayons donc !

```r
# on va reprogrammer la série sous forme de fonction pour varier
Sn <- function(n,x)
{
  # on crée pour chaque n le terme a_(k+1)/a_k
  res <- (1-2*1:n)/(2*(1:n+1))*x
  # on effectue le produit cumulé qui va nous donner pour chaque n a_n, en n'oubliant pas d'inclure a_1
  res <- cumprod(c(x/2,res))
  # on retourne le résultat qui est 1 plus la somme des a_n
  return(1+sum(res))
}
```

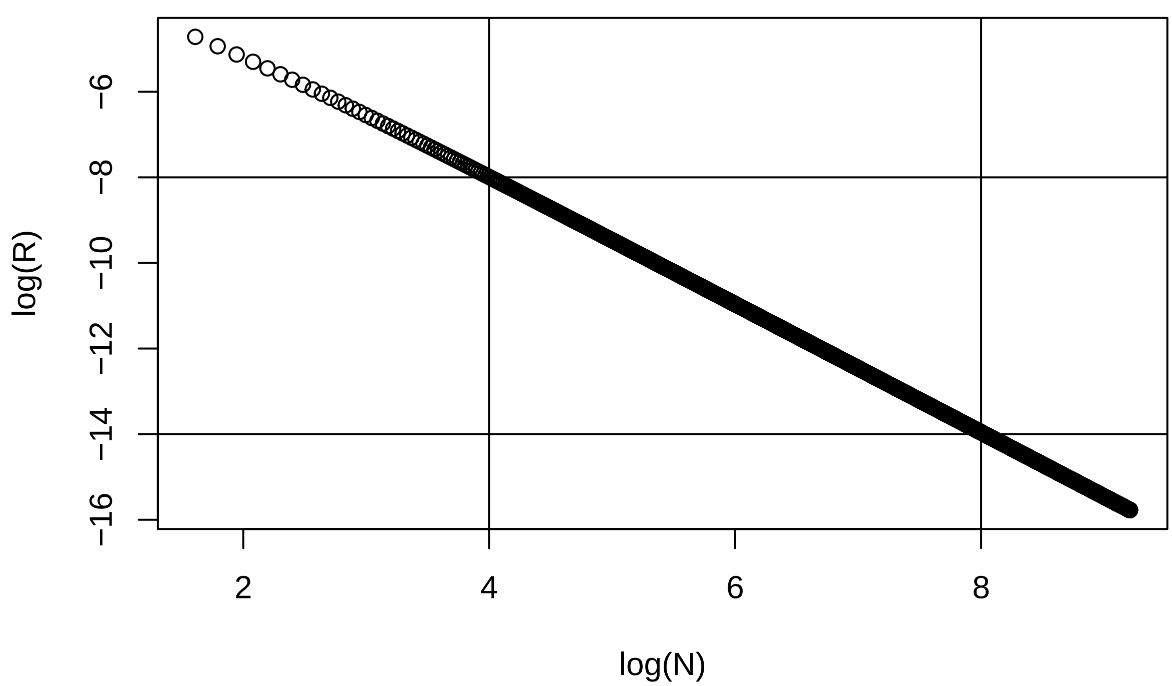
```r
# vérifions que cela marche pour n = 100
Sn(n = 100,x = 1)
```

```
## [1] 1.414352
```

```r
# on est heureux d'apprendre que ça marche

# on calcule maintenant les log de R_n et on répond aux questions de l'énoncé
# on crée le vecteur des n de 5 à 10000
N <- 5:10000
# on calcule R_n pour chacun de ces n, cela revient à soutraire à racine de 2
# la fonction codée précédemment, le tout en valeur absolue
R <- apply(X = as.matrix(N),MARGIN = 1,FUN = "Sn",x=1)
R <- abs(sqrt(2) - R)
# on effectue le tracé demandé

{
  plot(log(N),log(R))
  abline(v = 4)
  abline(v = 8)
  abline(h = -8)
  abline(h = -14)
}
```



On obtient une belle droite en échelle log/log dont le coefficient directeur semble être égal à -1.5. On en déduit une vitesse de convergence de $n^{-1.5}$.
En utilisant le critère de convergence des séries alternées, il découle directement que $|R_n| \leq |B_{n+1}|$ donc

$|R_n| \leq \frac{(n+2)(n+3)...(2n-1)}{(n-1)!4^n}$

Deuxième question

Calcul approché de π par série

Première question

On construit (u_n) de la manière demandée.

```
# pour n égal à 100
n <- 100
# on stocke dans un vecteur les valeurs
# successives de u_n
u <- (-1)^(0:n)*4/(2*(0:n)+1)
# on calcule le reste de la série
R <- pi - sum(u)
# on calcul la différence entre la majoration
# de la valeur absolue du reste et le reste
# pour calculer la valeur de la majoration
# se servir du cours, c'est écrit dedans noir sur blanc
dif <- abs(4/(2*n+3))-abs(R)
# on affiche les deux valeurs calculées précédemment
R
```

```
## [1] -0.009900747
```

```
dif
```

```
## [1] 0.009803686
```

```
# on effectue la même chose pour n égal à 1000
n <- 1000
u <- (-1)^(0:n)*4/(2*(0:n)+1)
R <- pi - sum(u)
dif <- abs(4/(2*n+3))-abs(R)
R
```

```
## [1] -0.0009990007
```

```
dif
```

```
## [1] 0.0009980037
```

```
# on effectue la même chose pour n égal à 10000
n <- 10000
u <- (-1)^(0:n)*4/(2*(0:n)+1)
R <- pi - sum(u)
dif <- abs(4/(2*n+3))-abs(R)
R
```

```
## [1] -9.999e-05
```

```
dif
```

```
## [1] 9.998e-05
```

La différence se joue à un facteur 10 près à chaque fois.

```
# on regarde l'évolution de notre reste directement
n1 <- 1
```

```r
while(abs(pi- sum((-1)^(0:n1)*4/(2*(0:n1)+1))) > 10^(-4))
{
  n1 <- n1+1
}
# On a du aller jusqu'a la valeur n1 pour obtenir cette précision
n1
```

```
## [1] 9999
```

```r
sum((-1)^(0:n1)*4/(2*(0:n1)+1))
```

```
## [1] 3.141493
```

```r
# on regarde maintenant si on utilise la majoration
# jusqu'à quel n1 va t il falloir aller
n1 <- 1
while(4/(2*n1+3) > 10^(-4))
{
  n1 <- n1+1
}
# On a du aller jusqu'a la valeur n1 pour obtenir cette précision
n1
```

```
## [1] 19999
```

```r
# ce qui fait quand même nettement plus d'opétations
```

Deuxième question

On calcule donc S_{10}.

```r
# on intialise nos n
n <- 0:10
# on crée le vecteur des Un
Un <- 6*gamma(2*n+1)/(2^(4*n+1)*gamma(n+1)^2*(2*n+1))
# on regarde la différence entre pi et notre série
R <- abs(pi-sum(Un))
# on affiche le reste
R
```

```
## [1] 6.714232e-09
```

On a donc une approximation à 10^{-9} près avec S_{10}. Pas mal !!

```r
# on intialise nos n
n <- 0:30
# on crée le vecteur des Un
Un <- 6*gamma(2*n+1)/(2^(4*n+1)*gamma(n+1)^2*(2*n+1))
# on regarde la différence entre pi et notre série
R <- abs(pi-cumsum(Un))
# on affiche le reste
R
```

```
##  [1] 1.415927e-01 1.659265e-02 2.530154e-03 4.375197e-04 8.148125e-05
##  [6] 1.593781e-05 3.228271e-06 6.712314e-07 1.424319e-07 3.071918e-08
## [11] 6.714232e-09 1.483906e-09 3.310552e-10 7.445555e-11 1.686296e-11
## [16] 3.842704e-12 8.801848e-13 2.025047e-13 4.662937e-14 1.065814e-14
## [21] 2.220446e-15 4.440892e-16 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
## [26] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
```

```
## [31] 0.000000e+00
```

On n'arrive plus à améliorer la précision de nos résultats à partir de `n = 23`. Cela est sûrement dû à la précision numérique de la machine.
Je ne cherche pas à calculer S_{200} parce que je ne veux pas faire hurler ma machine de douleur. Le calcul de la factorielle est bien trop méchant. Pour calculer s_{200}, on peut trouver la relation qui lie u_{n+1} à u_n. Après un calcul assez simple, on trouve que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2}{2^3(n+1)(2n+3)}$$

Ce qui devrait être légèrement plus simple à calculer pour la machine !!! (gentille machine) On précise que $u_0 = 3$.
On essaie :

```r
# j'initialise un vecteur qui ne contient que des u_0
u <- rep(3,201)
# je code la relation de récurrence avec une boucle
for(i in 0:199)
{
  u[i+2] <- u[i+1]*(2*i+1)^2/(2^3*(i+1)*(2*i+3))
}
# et on calcule !!!
sum(u)
```

```
## [1] 3.141593
```

On voit donc que l'on arrive à calculer S de cette manière également.

Limite du calcul numérique

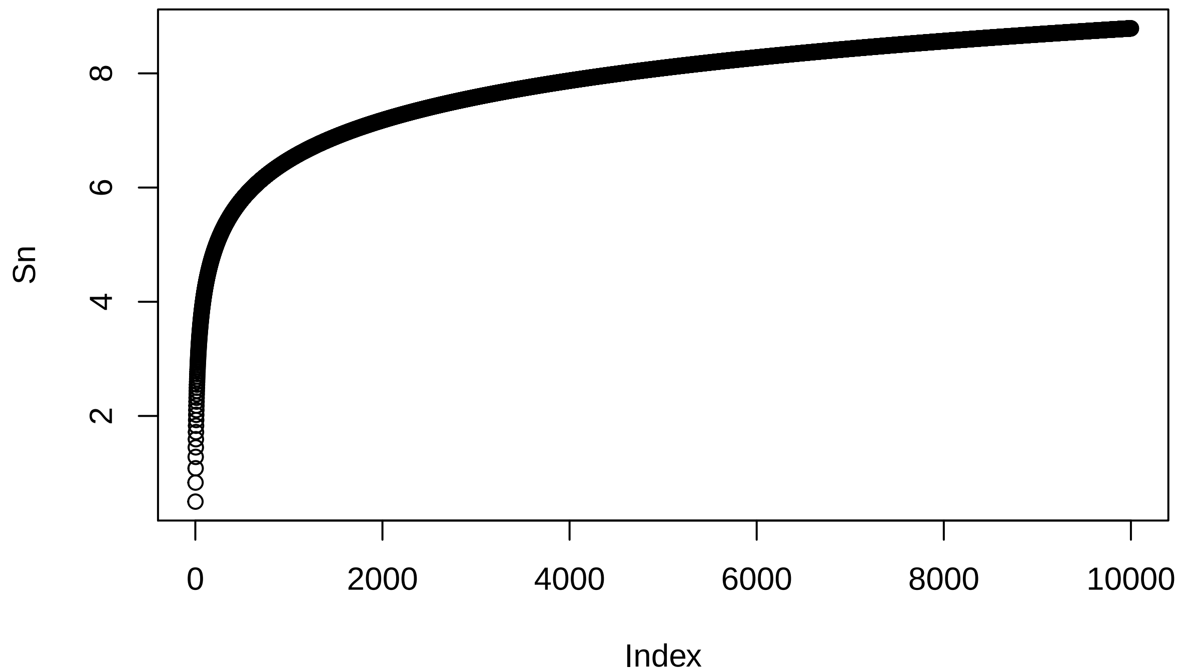
Première question

Pour la question de la convergence de la série de terme $u_n = \frac{1}{n+1}$, il y a plusieurs manières de procéder.
La première manière consiste à remarquer que $\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$. Or on sait que la série de terme $\frac{1}{n}$ ne converge pas. Donc on peut en déduire de même pour la série de termes (u_n).
La deuxième manière est de remarquer que à partir de $n = 1$, on a $n + 1 \leq 2n$. Donc à partir de $n = 1$, $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1}$. Donc si on regarde la série de terme $\frac{1}{2n}$, on constate qu'elle égale à la série de terme $\frac{1}{n}$ multipliée par $\frac{1}{2}$. Et on sait que la série de terme $\frac{1}{n}$ diverge donc cela implique que la série qui nous intéresse diverge (par comparaison).
La troisième manière se trouve en se reportant au cours. Il y a une proposition de cours qui énonce que si $|u_n| = f(n)$ (ce qui est notre cas) et que f eest décroissante vers 0 (ce qui est également notre cas), alors $\sum |u_n|$ avait le même comportement que $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Dans notre cas, remarquez que $|u_n| = u_n$. Calculons donc l'intégrale entre 1 et t ($t \in \mathbb{R}$) :

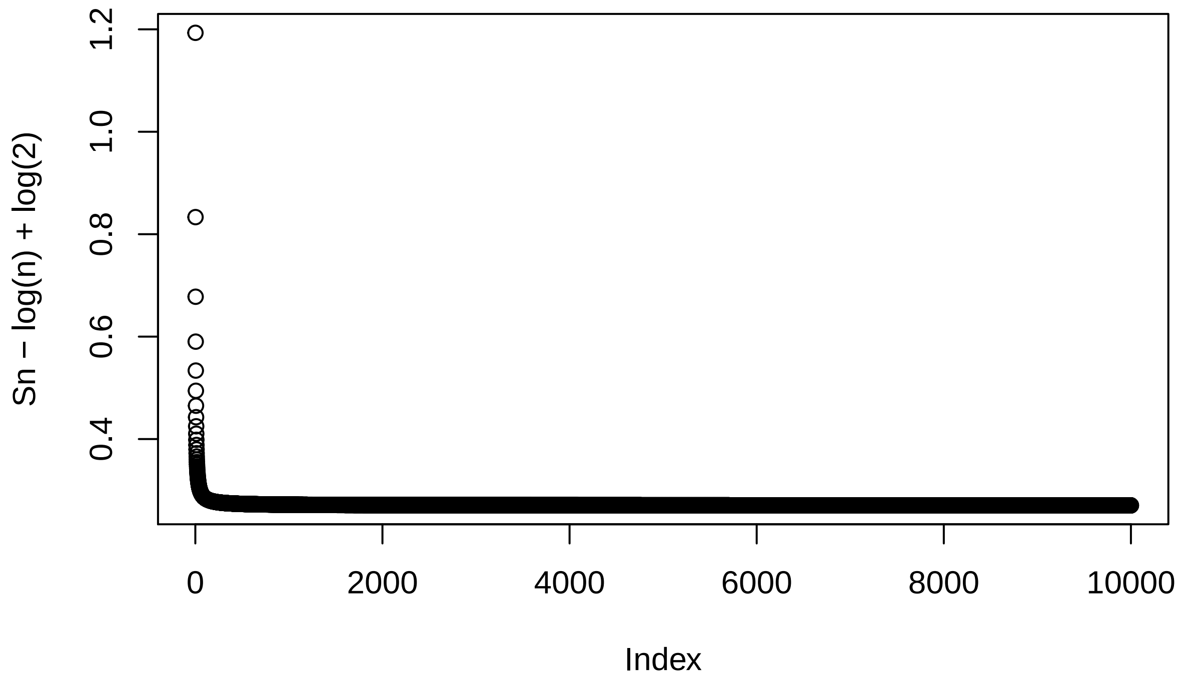
$$\int_1^t f(x)\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_1^t = \ln(t+1) - \ln(2)$$

On remarque donc que quand $t \to +\infty$, notre intégrale tend vers $+\infty$. On en déduit la divergence de notre série.

```r
n <- 1:10000
Sn <- cumsum(1/(n+1))
# on voit avec le tracé suivant que Sn ne semble pas converger
plot(Sn)
```




```r
# en revanche on avec le tracé ci-dessous que la différence entre
# notre série et la fonction log semble converger
plot(Sn-log(n)+log(2))
```

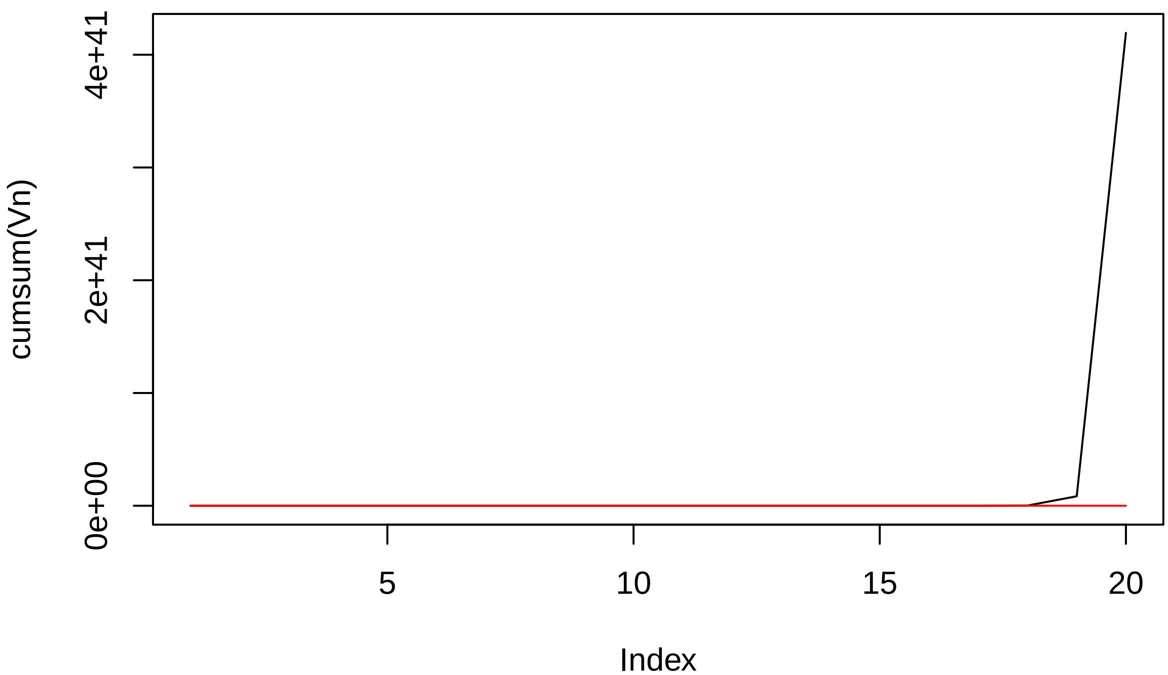


La troisième manière de présenter la divergence de notre série explique cette convergence.

Deuxième question

On commence donc par le code :

```
# on définit n
n <- 1:20
# on définit u_n
Un <- gamma(n+1)/1000^n
# on définit v_n
Vn <- 1000^n/gamma(n+1)
{
  plot(cumsum(Vn),type = "l")
  lines(cumsum(Un),col = "red")
}
```



Très clairement, le résultat numérique indique que la série de termes (v_n) est divergente et que celle de termes (u_n) converge.
Attenzione ! Notez que l'on ne peut pas donner à `n` des valeurs trop élevées parce que le calcul numérique devient trop compliqué pour la machine.
Regardons maintenant ce qu'il se passe théoriquement.
On pose $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > 1000$. On a donc que $0 < \frac{1000}{m} < 1$. On a, pour les valeurs de n supérieures à m, que :

$$1000^n = 1000^m 1000^{n-m}$$

et

$$n! = m! \times (m+1) \times (m+2)... \times n > m! \times (m+1)^{n-m}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1000^n}{n!} < \frac{1000^m 1000^{n-m}}{m!(m+1)^{n-m}}$$

Or lorsque $n \to +\infty$, ($\frac{1000^m}{m!}$ ne dépend plus de n) $\frac{1000^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} \to 0$ car $m+1 > 1000$. Donc $\frac{1000^n}{n!} \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Maintenant on se souvient du critère de d'Alembert. On a bien une suite de termes réels et positifs. On calcule le quotient suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1000^{n+1-m}}{(m+1)^{n+1-m}}}{\frac{1000^{n-m}}{(m+1)^{n-m}}} &= \frac{1000^{n+1-m}(m+1)^{n-m}}{1000^{n-m}(m+1)^{n+1-m}} \\ &= \frac{1000}{m+1} < 1\end{aligned}$$

Cela implique donc que la série de terme général $\frac{1000^m 1000^{n-m}}{m!(m+1)^{n-m}}$ converge !!! Donc cela implique que la série de terme général $v_n = \frac{1000^n}{n!}$ converge également (par comparaison) !!!
On retrouve donc exactement le résultat inverse de ce que nous avons obtenu par calcul numérique !!! Comme quoi, il faut se méfier…