TP6 Correction

Clément LAROCHE

31 mars 2019

Dans ce TP, la valeur que nous cherchons à approcher est la suivante :

```
pnorm(1)-pnorm(0)
```

```
## [1] 0.3413447
```

En effet, la fonction `pnorm` correspond à la fonction de répartition de la loi normale. On rappelle que, si l'on note F cette fonction de répartition, on a :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x$$

Donc si l'on calcule la quantité suivante, on retrouve bien ce que l'on cherche à approcher :

$$F(1) - F(0) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x$$

Méthode des rectangles

```
# on recode la densité de la loi normale centrée réduite

f <- function(x)
{
  1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2)
}
# on code sa dérivée
fprime <- function(x)
{
  -1/sqrt(2*pi)*x*exp(-x^2/2)
}

rectangle <- function(n)
{
  pas <- 0:n/n
  1/n*sum(f(pas))
}

rectangle(100)
```

```
## [1] 0.3445473
```

```
M1 <- max(abs(fprime(seq(from = 0,to = 1,by = 0.001))))
M1/(2*100)
```

```
## [1] 0.001209854
```

```
M1/(2*10^4)
```

```
## [1] 1.209854e-05
```

```r
M1/(2*10^6)
```

```
## [1] 1.209854e-07
```

```r
M1/(2*10^14)
```

```
## [1] 1.209854e-15
```

Méthode des trapèzes

```r
trapeze <- function(n)
{
  pas <- 0:n/n
  res <- f(pas)
  res <- 0.5*(res[-1]+res[-length(res)])
  1/n*sum(res)
}

trapeze(10000)
```

```
## [1] 0.3413447
```

```r
fsecond<- function(x)
{
    1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2)*(x^2-1)
}

M2 <- max(abs(fsecond(seq(from = 0,to = 1,by = 0.001))))
M2/(12*100^2)
```

```
## [1] 3.324519e-06
```

```r
M2/(12*(10^4)^2)
```

```
## [1] 3.324519e-10
```

```r
M2/(12*(10^6)^2)
```

```
## [1] 3.324519e-14
```

```r
M2/(12*(10^7)^2)
```

```
## [1] 3.324519e-16
```

Méthode de Simpson

La formule de la méthode de Simpson s'obtient en effectuant une interpolation de Lagrange sur chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. On peut obtenir, grâce à cette interpolation la formule du polynôme passant par les points $(\frac{k}{n}, f(\frac{k}{n}))$, $(\frac{2k+1}{2n}, f(\frac{2k+1}{2n}))$ et $(\frac{k+1}{n}, f(\frac{k+1}{n}))$. L'équation de ce polynôme est :

$$\begin{aligned}
P(X) &= f(\frac{k}{n})\frac{(X-\frac{2k+1}{2n})(X-\frac{k+1}{n})}{(\frac{k}{n}-\frac{2k+1}{2n})(\frac{k}{n}-\frac{k+1}{n})} + f(\frac{2k+1}{2n})\frac{(X-\frac{k}{n})(X-\frac{k+1}{n})}{(\frac{2k+1}{2n}-\frac{k}{n})(\frac{2k+1}{2n}-\frac{k+1}{n})} + f(\frac{k+1}{n})\frac{(X-\frac{k}{n})(X-\frac{2k+1}{2n})}{(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n})(\frac{k+1}{n}-\frac{2k+1}{2n})} \\
&= 2n^2 f(\frac{k}{n})(X-\frac{2k+1}{2n})(X-\frac{k+1}{n}) - 2n^2 f(\frac{2k+1}{2n})(X-\frac{k}{n})(X-\frac{k+1}{n}) + 2n^2 f(\frac{k+1}{n})(X-\frac{k}{n})(X-\frac{2k+1}{2n})
\end{aligned}$$

Une fois cette charmante formule obtenue, on se rappelle qu'on intègre ce polynome. Plus précisément, ce qui nous intéresse c'est de sommer tous les résultats d'intégrales qui nous donnera l'approximation de notre énoncé :

$$\frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(k/n)+4f((2k+1)/2n)+f((k+1)/n))$$

Passons au code.

```
Simpson <- function(n)
{
  pas <- 0:n/n # définition du pas
  pm <- pas + 1/(2*n) # défintion des points milieux
  pm <- pm[-length(pm)] # pas besoin du dernier point qui n'est pas dans [0,1]
  res <- 1/(6*n)*sum(f(pas[-length(pas)])+4*f(pm)+f(pas[-1]))
  res
}

Simpson(100)
```

```
## [1] 0.3413447
```

```
fourth <- function(x)
{
  1/sqrt(2*pi)*exp(-0.5*x^2)*(x^4-4*x^2+1)
}

M4 <- max(abs(fourth(seq(from = 0,to = 1,by = 0.001))))
M4/(2880*100^4)
```

```
## [1] 1.680352e-12
```

```
M4/(2880*(10^4)^4)
```

```
## [1] 1.680352e-20
```

```
M4/(2880*(10^6)^4)
```

```
## [1] 1.680352e-28
```

```
M4/(2880*(1000)^4)
```

```
## [1] 1.680352e-16
```